PROCESOS DE GENERALIZACIÓN A PARTIR DE CUADRADOS MÁGICOS

LUIS GABRIEL DOMÍNGUEZ RAMÍREZ

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
BOGOTÁ D.C.
2016

PROCESOS DE GENERALIZACIÓN A PARTIR DE CUADRADOS MÁGICOS

LUIS GABRIEL DOMÍNGUEZ RAMÍREZ

Trabajo de grado presentado como requisito parcial para optar al título de:
Magister en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales

Directora:
IVÓN ANDREA DORADO CORREA

UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA
FACULTAD DE CIENCIAS
MAESTRÍA EN ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
BOGOTÁ D.C.
2016

Dedicatoria

A mi amiga, compañera y novia de toda la vida,
Por estar siempre ahí y pensar en el futuro, sin descuidar el presente.

Agradecimientos

A mi directora Ivón Andrea Dorado, por su disposición, dedicación, acompañamiento, apoyo e interés. Sus enseñanzas fueron de gran valor en la construcción del presente trabajo.

A mis estudiantes, ya que sin su colaboración y participación no podría haberse desarrollado esta investigación.

A mi familia y amigos, por su apoyo incondicional.

RESUMEN:

En este trabajo se presenta la construcción de una propuesta didáctica, orientada a servir como puente entre la aritmética y el álgebra. Esto a través de la exploración de procesos de generalización, en el estudio de algunas propiedades de los cuadrados mágicos de lado impar. La propuesta se desarrolló en el espacio académico *Taller de cuadrados mágicos*, que se ofrece en el *Instituto Pedagógico Nacional*, con estudiantes de los grados octavo y noveno, pertenecientes al ciclo cuatro.

La expresión de patrones y regularidades en los cuadrados mágicos, es analizada de forma cualitativa, lo que permitió el diseño de una propuesta sustentada en el modelo de enseñanza y aprendizaje basado en la resolución de problemas.

PALABRAS CLAVE:

Propuesta didáctica, aritmética, álgebra elemental, patrones, regularidades, generalidad, procesos de generalización, cuadrados mágicos, resolución de problemas.

ABSTRACT:

In this paper, we construct a didactic tool, aimed to help in the transition from arithmetic to algebra. This is done through an exploration of some generalization process, in the study of some properties of odd side magic squares. The didactic tool was developed in the workshop Magic Squares, offered at the *Instituto Pedagógico Nacional*, for students from grades eight and ninth, belonging to four cycle .

The expression of patterns and regularities in magic squares, is analyzed qualitatively, allowing the design of a didactic tool supported by the teaching-learning method of problem-solving.

KEY WORDS:

Didactic tool, arithmetic, algebra patterns, regularities , generality, generalization process, magic squares, teaching-learning method of problem-solving.

CONTENIDO

FIGURAS Y TABLAS

INTRODUCCIÓN

Las bases del álgebra elemental construidas en la educación básica, constituyen un factor determinante en el éxito de los estudiantes en las matemáticas. Por esto, la transición entre la aritmética y el álgebra resulta ser una etapa crucial en el proceso de aprendizaje. Con la presente investigación, se pretende que esta transición se desarrolle de una forma consiente y meditada, en la que los estudiantes estén motivados y construyan herramientas para comprender los conceptos detrás de las expresiones literales que están empezando a utilizar.

Según Fripp (2009) y otros investigadores, el lenguaje algebraico es producto de un recorrido histórico desde el 2000 a. C. hasta el siglo XVI aproximadamente, que comprende los momentos denominados, álgebra retórica, sincopada y simbólica. Resulta importante tener en cuenta, que el proceso que le tomó a la humanidad alrededor de 3000 años, para desarrollar o perfeccionar dicho lenguaje, sugiere lo difícil que puede ser para los estudiantes, la adquisición, comprensión y utilización del mismo. Como lo indica Socas (2011) "parte de los procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del álgebra escolar, tienen sus raíces en el desarrollo histórico del álgebra como un sistema simbólico" (p. 7).

Los cursos de álgebra elemental que se imparten comúnmente en las instituciones educativas colombianas, y en particular en el *Instituto Pedagógico Nacional* (donde se llevo a cabo esta investigación), se desarrollan después de los de aritmética. Lo cuál tiene sentido, si se establece que la relación entre estas ramas de las matemáticas, corresponde a lo que plantea Gavilán (1996), quien indica que, la aritmética es la ciencia que trata de los números y el álgebra es una aritmética universal, que trata de la cantidad en general.

Lo anterior da cuenta de la importancia que tiene el paso de la aritmética al álgebra, como un problema de interés en la enseñanza de las matemáticas. Muchas investigaciones sobre el tema, coinciden en que la forma más eficaz de hacerlo, es a través de procesos de generalización, siempre y cuando se establezcan y/o reconozcan relaciones entre objetos matemáticos.

Por tal razón, para este trabajo los objetos matemáticos que se escogieron son los *cuadrados mágicos*, que son un arreglo cuadrado de números, en los que los términos de cada fila, columna y diagonal suman lo mismo. Estos además, despiertan gran interés en los estudiantes por su componente lúdico.

Así pues, esta investigación corresponde a una propuesta didáctica, basada en el estudio de las propiedades de los cuadrados mágicos para abordar los procesos de generalización, como una alternativa para hacer la introducción del álgebra escolar. Los resultados principales son:

- El diseño e implementación de una primera propuesta didáctica en el Instituto Pedagógico Nacional.
- El desarrollo de una ambiente agradable en el aula, que motivó a los estudiantes a trabajar con gusto en matemáticas.

- La implementación de la propuesta didáctica, que proporcionó herramientas para que los estudiantes construyeran por sí mismos, bases para el aprendizaje del lenguaje algebraico.
- El análisis cualitativo de la primera propuesta didáctica, que permite su adecuación, para la formulación del producto final.
- El diseño de la versión final de la propuesta didáctica, la cual lleva a que los estudiantes hagan un uso consiente de expresiones literales propias del lenguaje algebraico.
- Ponencia en el 22º Encuentro de Geometría y sus aplicaciones realizado en la ciudad de Bogotá, en el 2015 (ver Domínguez, L. & Medina, I. (2015)).

Para presentar estos resultados, el presente documento se ha estructurado en siete capítulos. En el primer capítulo, se establece el problema de investigación, teniendo en cuenta aspectos como, el rechazo de algunos estudiantes a las matemáticas, justificando así la necesidad de desarrollar la investigación, bajo el modelo de enseñanza a través de la resolución de problemas. Algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra, debidas a la confusión de los conceptos con su representación y la introducción propia del álgebra en la escuela. La pertinencia de los cuadrados mágicos como objeto de estudio, justificada por la disposición positiva que este concepto despierta en los estudiantes. Finalmente, en este capítulo se presentan los objetivos general y específicos del trabajo desarrollado.

El segundo capítulo corresponde al soporte teórico de la investigación, donde se exponen tres apartes. En el primero se abordan los trabajos previos que dan cuenta del estudio del pensamiento algebraico, por medio del análisis de aspectos orales, escritos, gestuales y procedimentales, utilizados en la expresión de la generalidad. El uso de las representaciones verbal, gráfica, numérica y simbólica de los objetos con los que se desarrollan los procesos de generalización, y experiencias relacionadas con la implementación de los cuadrados mágicos en la escuela. En el segundo se tratan aspectos relativos a la generalización, donde se definen los conceptos que la sustentan y se presentan algunas teorías relativas al análisis de su expresión. Por último, en el tercer aparte, se exponen algunos acontecimientos históricos y el desarrollo teórico de los cuadrados mágicos, parte de él, está publicado en Domínguez, L. & Medina, I. (2015).

El tercer capítulo concierne al marco metodológico, que aborda la forma en que se desarrollaron cada uno de los objetivos específicos, planteados en el primer capítulo y las fases metodológicas de la investigación. En este se describen los instrumentos de recolección de información, correspondientes a las guías de actividades, donde se establecen los retos, preguntas o problemas, orientados a desarrollar procesos de generalización y los videos de las sesiones de clase, correspondientes a la implementación de la propuesta. Además se presentan los convenios utilizados en la transcripción de los videos o fragmentos de los mismos, relativos al pilotaje de las actividades.

En el cuarto capítulo se analiza de forma cualitativa, la primera versión de la propuesta didáctica diseñada e implementada. En este se examinan las respuestas dadas por los estudiantes a lo propuesto en las guías, a través de las etapas y los estratos sobre la expresión de la generalidad, que definen dos teorías referentes a esta problemática. Además se presentan conclusiones, sobre la puesta en práctica de las actividades, que dan cuenta de su pertinencia y permiten su adecuación o reformulación.

En el quinto capítulo se presenta el producto final de esta investigación, que corresponde a la propuesta didáctica como tal. En este se exponen una serie de recomendaciones generales, que orientan su puesta en práctica en el aula y las actividades que la conforman. Para estas últimas, se establecen los objetivos de enseñanza, la estructura, recomendaciones particulares para su implementación y las guías que orientan los procesos de generalización.

Finalmente en los capítulos sexto y séptimo, se presentan respectivamente, las conclusiones de la investigación e ideas que dan pie a un trabajo futuro.

Además se incluyen dos apéndices: uno con las convenciones utilizadas en la transcripción de los videos, relativos al pilotaje de las actividades, con el objetivo de hacer más fácil su búsqueda en el documento y otro correspondiente a la primera versión de las guías correspondientes a las actividades implementadas en el aula.

CAPÍTULO 1.

PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1. Planteamiento del problema

La investigación que a continuación se plantea, consiste en una propuesta didáctica centrada en los procesos de generalización a partir de los cuadrados mágicos, orientada a servir como puente en la transición de la aritmética al álgebra durante la educación básica secundaria.

Los cuadrados mágicos son un arreglo rectangular de tamaño $n \times n$ de números enteros, es decir, una matriz de igual cantidad de filas y columnas, donde la suma de los números de cada columna, fila y diagonal, es la misma. Tal concepto, ha estado presente en muchos apartes de la historia, siendo algunos de los más relevantes los expuestos por Acuña, Arellano & Barahona (2010):

i) El reconocimiento de un cuadrado mágico en el caparazón de una tortuga, que según la leyenda de una aldea china, sirve como solución a un problema con el desbordamiento de un río (este evento probablemente es el primer registro del concepto en la historia).

ii) El uso de los cuadrados mágicos como representación simbólica de algunos astros por parte del matemático Cornelio Agrippa (1486 - 1535).

iii) En el renacimiento se muestra un cuadrado mágico de lado cuatro, en un grabado de Alberto Durero titulado *Melancolía* (tal cuadrado se considera como el primero de las artes europeas).

iv) Durante la edad media, a los cuadrados mágicos se les atribuían poderes místicos y eran grabados en placas de plata para ser usados contra enfermedades como la peste.

Además se resalta, que muchos autores y matemáticos como Euler y Pascal, se interesaron por el estudio de los cuadrados mágicos, encaminándose de esta manera, en la búsqueda de métodos para construirlos. Algunos de los métodos encontrados son de carácter formal, como el estudio realizado por Rodríguez (2004), determinado a partir de una geometría finita sobre el conjunto Z_5^2, y otros se relacionan con conceptos propios del álgebra lineal. Adicionalmente, Alegría (2009), afirma que “Algunos de los resultados matemáticos relativos a los cuadrados mágicos tienen aplicaciones importantes a diversos campos del conocimiento científico” (p. 107). Esto da pie para inferir, que el estudio de los cuadrados mágicos aún está en proceso de exploración.

Por otra parte, en algunas investigaciones se reconoce que el estudio de los cuadrados mágicos aporta significativamente a la motivación de los estudiantes frente a las matemáticas, y mejora la disposición de estos para el aprendizaje de las mismas; según indica Acuña *et al* (2010) “se fomenta el cariño por la matemática, ya que los alumnos aprenden jugando, explorando, conjeturando, descubriendo propiedades y compartiendo con sus pares” (p. 46); además, su exploración posibilita y potencia el desarrollo de habilidades en matemáticas. Es por esto, que los cuadrados mágicos son abordados comúnmente por la matemática recreativa, apareciendo inmersos en distintos contextos en el marco de la resolución de problemas.

Así, se considera que el estudio de los cuadrados mágicos en la escuela, podría aportar a la solución de la problemática que describe Peralta (2001), sobre el rechazo a las matemáticas. En su trabajo se enuncia que esta se debe en parte a la connotación de las matemáticas como una disciplina cerrada y severa, en donde los docentes tienen gran parte de la culpa, por facilitar la ruta, receta o fórmula para resolver un problema, que como consecuencia lleva a que los estudiantes no desarrollen habilidades ni potencien su creatividad. Luego podría pensarse que la exploración de los cuadrados mágicos permitiría fomentar la imaginación de los estudiantes para abordar problemas, además de motivarlos por el aprendizaje de las matemáticas.

Otra de las problemáticas de la educación matemática, (sobre la que distintos investigadores han redoblado esfuerzos en analizar), es la que se relaciona con las dificultades del aprendizaje del álgebra; en ellas se destacan los procesos de generalización como puente de acceso. Arriaga (2008) manifiesta que “El desarrollo del pensamiento algebraico vía los procesos de generalización es eficaz cuando se logran interconectar diferentes contenidos matemáticos” (p. 145), además expone la importancia de tratar el problema de la representación, desde lo concreto hasta lo simbólico, mediado por la necesidad de hacer cálculos. Debido a su naturaleza, el estudio de los cuadrados mágicos en la escuela favorece tales aspectos, ya sea en el análisis de sus métodos de construcción, la búsqueda de sus propiedades, o en algunos problemas asociados a su representación.

Teniendo en cuenta lo anterior, puede deducirse que el estudio sobre los procesos de generalización, resulta ser un campo relevante de investigación para la enseñanza del álgebra. Mason, Graham, Pimm, & Gowar (1985) (citados por Arriaga, 2008), proponen que el trabajo con la generalidad debe darse en cuatro etapas: ver, decir, registrar y probar un patrón. Así pues resulta interesante analizar cómo los estudiantes desarrollan estas cuatro etapas mientras realizan actividades con los cuadrados mágicos.

En general, los estudiantes colombianos cuyas edades están entre los 13 y 15 años, se encuentran en el proceso de aprendizaje relacionado con la transición entre la aritmética y el álgebra, por ende la propuesta didáctica esta dirigida a estudiantes de grados octavo y noveno, (ciclo cuatro) y en particular, a los del *Instituto Pedagógico Nacional.*

En conclusión, la investigación ha sido orientada por la siguiente pregunta: ¿Cuál puede ser una propuesta didáctica, para abordar los procesos de generalización en estudiantes de ciclo cuatro del Instituto Pedagógico Nacional?

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Diseñar una propuesta didáctica que aborde los procesos de generalización en estudiantes de ciclo cuatro, fundamentada en el análisis de regularidades y patrones en los cuadrados mágicos.

1.2.2. Objetivos específicos

- Examinar propuestas didácticas para la educación básica y media, relacionadas con los patrones y la generalización.

- Aplicar una prueba diagnóstica a los estudiantes del ciclo cuatro que participarán en el proyecto, para determinar su nivel de habilidad en el reconocimiento y generalización de patrones.

- Seleccionar en los cuadrados mágicos patrones y regularidades, que puedan potenciar procesos de generalización y comprensión de propiedades algebraicas básicas, pertinentes al ciclo cuatro.

- Estructurar la secuencia de actividades, a través de la transposición didáctica.

CAPÍTULO 2.

MARCO TEÓRICO

2.1. Antecedentes

El profesor Vergel (2014), en su estudio relacionado con las formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de "cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria", sugiere la posibilidad de abordar tal pensamiento, en los primeros años de escolaridad a partir del trabajo con el reconocimiento de patrones y la generalización. El autor considera el análisis de aspectos orales, escritos, gestuales y procedimentales que dan cuenta de los modos de pensar de los estudiantes. El análisis realizado por Vergel, se sustenta en la *teoría de la objetivación*, que clasifica el pensamiento algebraico en *factual, contextual* y *estándar* o *simbólico*.

De igual forma, la investigación de Acuña & Chalé (2013), con base en el análisis de la visualización sobre la generalización de patrones, señala que, la visualización juega distintos papeles en el proceso de generalización, resaltando en el proceso, algunas relaciones entre las distintas representaciones. Tal investigación se enmarca en la *teoría de las representaciones semióticas* y también en la teoría de objetivación.

Adicionalmente, la investigación realizada por Cañadas, Castro, & Castro (2012), relacionada con diferentes formas de representar la generalización en problemas de sucesiones, indica que el lenguaje algebraico no es el único medio para llevar a cabo este proceso, puesto que el lenguaje natural y la representación gráfica, también juegan un papel importante en ello. De hecho señalan que la representación gráfica, sirve como puente, entre distintas formas de representación. Esta investigación se constituye como un referente importante en el análisis de las representaciones de patrones, y de la generalidad, ya que justifica la pertinencia de analizar los procesos de generalización, a partir de distintas formas de representación, sin privilegiar el lenguaje algebraico.

Por otra parte, el trabajo realizado por Acuña *et al* (2010) sobre los cuadrados mágicos, destaca que su estudio, es una buena forma de motivar a los estudiantes en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Además presenta una serie de actividades catalogadas como entretenidas, para el trabajo en el aula de clase. Tales actividades fueron exploradas en busca de patrones y regularidades pertinentes en la propuesta didáctica.

Sumado a esto Fripp (2009), expone como estrategia para introducir el álgebra en la escuela, el trabajo con cuadrados mágicos, ya que en estos pueden reconocerse regularidades y patrones, que dan cuenta de alguna forma del desarrollo histórico del álgebra. Tal evolución se da básicamente en tres momentos: el primero, llamado álgebra retórica, en el cual la descripción de reglas, se hace a través del lenguaje natural. El segundo, conocido como álgebra sincopada o lacónica, se caracteriza porque además de usar el lenguaje ordinario, asocia abreviaturas para representar operaciones o incógnitas. El tercero, conocido como álgebra simbólica, usa signos específicos para representar operaciones, incógnitas y datos.

Es así que en la revisión de los antecedentes, se hace evidente la pertinencia del análisis de patrones y regularidades en los cuadrados mágicos, como puente para la enseñanza y el aprendizaje del álgebra escolar (entendida como la rama de las matemáticas que estudia las regularidades y patrones).

A continuación se da a conocer el fundamento teórico, tenido en cuenta para el desarrollo de la investigación. Este se presenta en dos apartados, uno sobre la generalización y el otro sobre los cuadrados mágicos.

2.2. Sobre la generalización

Para esta investigación, el concepto de *patrón* se define desde las postulaciones de Bressan & Gallego (2010) como:

> Sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, de comportamiento, etc.) que se construye siguiendo una regla (algoritmo), ya sea de repetición o de recurrencia. Es decir, se usan los vocablos *patrones* o *secuencias* indistintamente (otros autores utilizan el término *patrón* para designar estrictamente el núcleo o unidad de la secuencia). (p.13)

De acuerdo a estos autores, los patrones pueden clasificarse en patrones de *repetición* y de *recurrencia*, donde:

> Los patrones de repetición son aquellos en los que los distintos elementos se presentan en forma periódica. Existen y se pueden crear diversos patrones de repetición teniendo en cuenta su estructura de base o núcleo.
>
> Son patrones de recurrencia aquellos en los que el núcleo cambia con regularidad. Cada término de la sucesión se expresa en función de los anteriores, de cuyo análisis se infiere su ley de formación. En ellos se encuentran las llamadas progresiones aritméticas y geométricas, (trabajadas apenas en los últimos años del nivel secundario, aunque muchísimos temas de la aritmética básica las encierran). Los arreglos de números y las tablas de operaciones, las escalas, los sistemas de numeración posicional, el sistema de medida. (p. 13-14).

Castro, Cañadas & Molina (2010) resaltan la posibilidad de llegar a la generalización, por medio de la abstracción de las características comunes, a través del reconocimiento de patrones, los cuales se constituirán en leyes. Posteriormente Cañadas *et al* (2012), ratifican que la generalización se logra de dos maneras: con la identificación de un patrón común, proveniente de algunos casos particulares, o con el uso de alguna característica común, en otras situaciones.

De igual forma, los procesos de generalización pueden analizarse de acuerdo a su expresión de distintas formas. Es así que se presentan tres maneras de analizar la expresión de la generalidad:

En primer lugar, la teoría de la objetivación desarrollada por Radford (2006), indica que el pensamiento es una "re-flexión" y no una simple asimilación de la realidad "externa", ni tampoco una construcción.

Radford (2006) estipula que los procesos de generalización o estratos de la generalidad se clasifican en tres tipos: *factual*, que corresponde a aquel en donde sólo se reconocen ejemplos particulares y acciones concretas, sin ser enunciadas las variables o incógnitas ("indeterminancia"), siendo así un grado básico de la generalidad. *contextual*, en el que se hace explícita la "indeterminancia", sin el uso de símbolos, esta se describe a través de gestos o palabras que son usadas para comprender las relaciones inmersas en los patrones. *Simbólico*, en el cual la "indeterminancia" se expresa por medio de símbolos alfanuméricos, decidiendo en el transcurso, el significado de las letras, lo que lo convierte un proceso complejo. Cabe resaltar que en esta teoría, el aprendizaje se da al otorgar sentido a los objetos conceptuales presentes en la cultura, lo cual dota de una especial importancia, al proceso de la elaboración activa de significados.

En segundo lugar, la teoría de las representaciones semióticas aborda problemas tales como, la confusión del concepto con la representación y el cambio entre representaciones, siendo este último, un aspecto relevante en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

A diferencia de otras ciencias, los objetos de las matemáticas no son tangibles (es decir que son abstractos), como menciona Duval (1999) citado por Ospina (2012) "la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación"(p. 32). Es así que Cañadas *et al* (2012), proponen una clasificación de la generalización, de acuerdo a la representación que se asocia en la identificación de los patrones así: generalización *aritmética*, que se asocia a la representación numérica. Generalización *gráfica*, relativa a la representación gráfica. Generalización *algebraica*, en la que resalta el uso de símbolos alfanuméricos, y generalización *verbal*, presente en el uso del lenguaje natural.

En tercer lugar, Mason *et al* (1985) indican que la expresión de la generalidad se da en cuatro etapas: *ver un patrón*, en la que se percibe la regularidad al analizar lo que pasa de una figura a otra, o de un término al siguiente. *Decir cuál es el patrón*, en la que se expresa de forma verbal, (o "gestual" de acuerdo con Radford) la regularidad observada. *Registrar el patrón*, en la que se expresa la regularidad de forma concisa. De acuerdo a esta etapa Arriaga (2008) manifiesta que " El registro del patrón puede iniciar con oraciones donde se mezclen palabras, dibujos, y símbolos"(p. 5) y *Probar la validez de la fórmula,* en la cual se hace una comprobación de la fórmula, a través de cálculos aritméticos o dibujos.

Por último, el desarrollo histórico del algebra podría dar indicios de una forma alternativa para abordar procesos de generalización. Al respecto, Kieran (1995) citada por Fripp (2009) establece que "algunos procesos cognitivos involucrados en el aprendizaje del álgebra escolar tienen sus raíces en el desarrollo histórico del álgebra como sistema simbólico". Luego es factible pensar en un tratamiento del pensamiento algebraico, en el marco de las fases históricas del algebra (retórica, sincopada y simbólica) descritas en los antecedentes.

En particular, el análisis de la generalidad desarrollado en la presente investigación, se centra en los estratos de la generalidad descritos por Radford (2006) y las etapas enunciadas por Mason *et al* (1985), enmarcado sobre el estudio de los cuadrados mágicos. Los cuales son abordados principalmente en la matemática recreativa, puesto que su naturaleza y configuración particular, despierta interés en los estudiantes. Ello se ve en la motivación que distintos investigadores enuncian en sus estudios.

2.3. Sobre los cuadrados mágicos

2.3.1. Algo de historia

Al hablar de cuadrados mágicos es importante remontarse a los 2200 a.C., puesto que es allí donde probablemente inicia su historia. De acuerdo con Mencken (2014):

> Según una antigua leyenda china, cuando el gran emperador Yu (2200 a.C.) estaba paseando por el rio amarillo, apareció una tortuga divina que tenía sobre su caparazón la siguiente tabla de números, llamada lo-shu.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Figura 1. Lo-shu.

Dicho arreglo numérico, sumaba el mismo valor por cualquier lado, es decir que al sumar los números de cada fila, columna o diagonal siempre dan 15, lo que permitía considerarlo como algo mágico.

Ramírez, Alcaide & Bazaga, (s.f.) afirman que los chinos

> Atribuyeron un carácter místico a este arreglo numérico y creían que era un símbolo que reunía los principios básicos que formaron el Universo.
>
> - Los números pares simbolizaban el principio femenino o Yin.
> - Los números impares simbolizaban el principio masculino o Yang.
> - El 5 representa la Tierra, a su alrededor están distribuidos los cuatro elementos principales, el agua. 1 y 6, el fuego 2 y 7, la madera 3 y 8, los metales 4 y 9. (p. 23) (ver Figura 1)

El lo-shu como se conocía en China, se convirtió en un "artículo obligado en la casa de todos los adivinos y aparece en numerosas obras" (Mencken, 2014). Posteriormente en India se da a conocer otro cuadrado mágico, uno de orden 4, en el cual sus filas, columnas y diagonales sumaban 34 (ver Figura 2), este es posiblemente el segundo cuadrado mágico conocido.

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

Figura 2. Posiblemente el segundo cuadrado mágico conocido.

La mística atribuida a los cuadrados mágicos, se hizo evidente en la edad media, puesto que se utilizaron para la predicción del futuro, la cura de enfermedades, la contra ante maleficios y en algunas ocasiones eran tallados en vajillas de plata para evitar el envenenamiento de las personas que allí consumían alimentos.

De igual forma en el Renacimiento se utilizaron cuadrados mágicos con fines terapéuticos. "Como amuleto para ahuyentar la melancolía, los astrólogos de la época "recetaban" cuadrados mágicos de orden cuatro." Alegría (2009) refiriéndose a una de las propiedades que en esta época se le daban a los cuadrados mágicos.

Sin embargo no todos los cuadrados mágicos eran considerados de buena suerte, algunos y tal como lo explica Alegría (2009) eran considerados "*diabólicos* pues, al intercambiar algunas filas o columnas, se mantenían sus propiedades. Otros eran "*satánicos*" porque seguían siendo cuadrados mágicos, cuando se elevaban cada uno de sus números al cuadrado o al cubo." (p. 108)

Los cuadrados mágicos en otros lugares del mundo, al igual que en China e India fueron considerados como objetos preciados, dotados de propiedades místicas. Como lo afirma Alegría (2009):

> La introducción de los cuadrados mágicos en Europa se produjo en el siglo XIV a través de los árabes por intermedio del monje griego Manuel Moschopoulos, quien publicó un libro basado en los descubrimientos del matemático árabe Al-Buni. También aquí fueron considerados como amuletos y talismanes contra diversas enfermedades. (p. 109)

Adicionalmente el conocimiento de los cuadrados mágicos, propició la construcción de obras arquitectónicas y la búsqueda y generación de otros cuadrados mágicos, como por ejemplo el grabado *La Melancolía* de Alberto Durero realizado en 1514, que consistía en un cuadrado mágico de orden 4 (mismo tamaño del mencionado anteriormente), pero con una organización diferente de los números que lo componen (ver Figura 3).

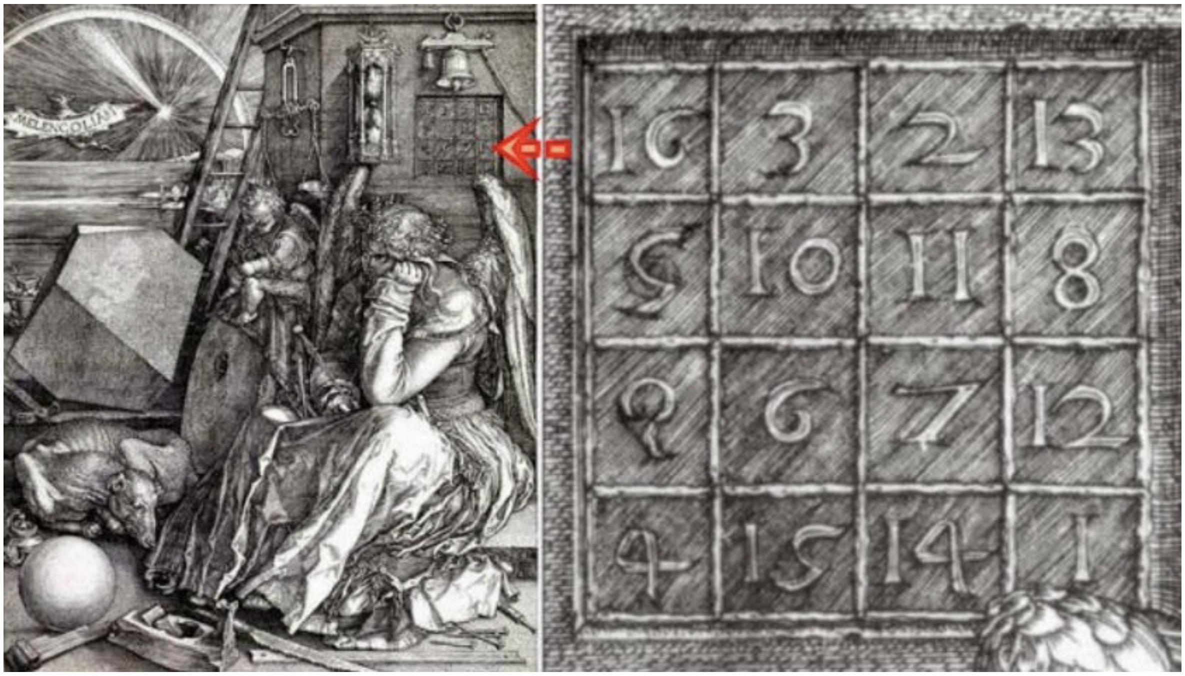


Figura 3. Grabado de Alberto Durero, con ampliación del cuadrado mágico de orden 4. Fuente: https://goo.gl/gAvoev

Así mismo en el siglo XVI, se da a conocer la obra *De occultta philosophia* de Cornelio Agrippa, la cual fue publicada de manera completa en 1533. En esta obra, según Martínez (2004), se afirma que:

> La magia y las matemáticas poseen tal grado de conexión que nada se puede realizar con éxito en el ámbito del primer rubro sin un conocimiento profundo del segundo. Esto se desprende, según Agrippa, de una idea pitagórica que hacía de los números algo más formal y abstracto que los objetos físicos y, por ello, poseían una cualidad de "actualidad" superior. Más aún, a pesar de ser independientes (por su misma esencia), de los objetos físicos, las operaciones que con ellos se efectuaban poseían cualidades similares a las de los objetos que las inspiraban, pero sin la desventaja de estar sujetos a los accidentes, en el sentido aristotélico, de los objetos materiales. (p. 83)

Teniendo en cuenta que Agrippa era considerado uno de los magos emblemáticos de la época, era de suponerse, que considerara una relación de los cuadrados mágicos o *Tabula in abaco* (como el los denominaba) con situaciones místicas. La cuál indicaba según Martínez (2004) que los cuadrados mágicos:

> Eran concebidos como figuras creadas de manera que tanto los números como su ordenamiento resaltaban o enfatizaban su relación con las "ideas divinas" de número y de los objetos creados. La estructura del cuadrado mágico daba la pauta para que se interpretaran según nociones cabalísticas y que, por ende, hubiera un marco de referencia frente al cual contrastar su conexión con la "verdad". (p. 87)

Es así que Agrippa aborda "las conexiones astrales de los cuadrados mágicos" (Martínez, 2004) construyéndolos de los órdenes 3 a 9 y atribuyéndoles un significado astronómico

(Ramírez Verdugo et al, s.f.). En el desarrollo del capítulo 22 de la obra *De occultta philosophia,* establece la relación del cuadrado mágico de orden 3 con Saturno (

Figura 4), y de manera sucesiva la relación de los planetas con cuadrados mágicos acordes a su orden, es decir que Júpiter (Figura 5) tenía relación con el cuadrado mágico de orden 4 y Marte (Figura 6) con el de orden 5. De esta manera Martínez (2004) retoma la relación citada por (Schimmel, 1992) entre los valores numéricos de las letras y el nombre arábigo de los planetas como se muestra a continuación:

> Saturno era 45 ($Zuhal = ZHL = 7 + 8 + 30$) que venía a ser la suma de los números que aparecen en un cuadrado mágico de orden 3 (Schimmel, 1992, p. 30). El sistema ganaba en coherencia, y por tanto en credibilidad, si tomamos en cuenta que, para Agrippa, el planeta Júpiter encontraba correspondencia, según las prácticas de los "infieles", 8 con el "divino nombre" Jehovah y con el Tetragrammaton (el "divino nombre" expresado con cuatro letras), así como con la ley pitagórica expresada en el Tetractys (o número cuatro). Para los creyentes en esta red de correspondencias todas estas concordancias no eran sino expresiones de la fuente eterna de donde surge la naturaleza. (p. 88)

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Figura 4. Cuadrado mágico de Saturno.

4	14	15	1
9	7	6	21
5	11	10	8
16	2	3	13

Figura 5. Cuadrado mágico de Júpiter.

11	24	7	20	3
4	12	25	8	16
17	5	23	21	9
10	18	1	14	22
23	6	19	2	15

Figura 6. Cuadrado mágico de Marte.

Adicionalmente Martínez (2004) enuncia que en el siglo XVII se da una proliferación de los cuadrados mágicos:

> La manera como crecía el número de cuadrados diferentes según aumentaba el orden era impresionante y, a mediados del siglo XVII, Bérnard Frénicle demostró que de orden 4 hay 880 cuadrados mágicos diferentes y hoy se sabe que existen 275 305 224 de orden 5 (Agrippa, 2003, p. 734). (p. 80)

Lo descrito en este aparte del marco teórico, da cuenta de la trascendencia e importancia que ha tenido el estudio de los cuadrados mágicos a lo largo de la historia. Como lo afirma Alegría (2009).

> Los cuadrados mágicos han estado presentes en todas las épocas y culturas del conocimiento humano, han sido objeto de veneración religiosa, se han utilizado como elementos mágicos y místicos, han merecido un lugar destacado en diversas manifestaciones artísticas e industriales e, incluso, han despertado el interés entre los más ilustres matemáticos a lo largo de la historia.

Uno de los matemáticos que prestaron interés por el estudio de los cuadrados mágicos, es Leonard Euler quien formula en 1779 el *problema de los oficiales*. Pese a que este no tiene solución, a aportado a la construcción de la teoría de Grafos. A continuación se presenta el problema de los oficiales descrito por Alegría (2009).

> “De cada uno de seis regimientos distintos se escogen seis oficiales de distinto rango, por ejemplo general, coronel, capitán, teniente, alférez y sargento. Queremos colocar los 36 oficiales en seis filas de seis personas cada una de manera que en ninguna fila y ninguna columna haya dos oficiales del mismo rango ni del mismo regimiento. ¿Es posible dicha disposición?" (p. 108)

Euler también planteo el *solitario de los naipes*, que a diferencia del planteamiento de los oficiales, si es posible de solucionar. El solitario de los naipes de acuerdo con Alegría (2009) puede ser enunciado así:

> "De una baraja se extraen las cuatro figuras, sota, caballo, rey y as de todos los palos. Se pide colocar las 16 cartas formando un cuadrado 4×4 de modo que cada fila y columna contenga únicamente una carta de cada valor y de cada palo". (p. 108)

Adicionalmente Euler se interesó por el recorrido del caballo de ajedrez, sobre el que “le preocupaban aquellas trayectorias que describían cuadrados mágicos o casi mágicos” (Fernández, 2007). A partir de ese recorrido planteó el tablero de ajedrez con una suma de 260 en sus filas y columnas, pero no en diagonales, generando un arreglo cuadrado de orden 8 (ver Figura 7).

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Figura 7. Cuadrado de orden 8, generado por los movimientos de un caballo en el ajedrez. Fuente Fernández (2007)

El arreglo cuadrado correspondiente a los recorridos de un caballo de ajedrez, resulta no ser un cuadrado mágico. Fernández (2007) afirma que "actualmente se sabe que los recorridos completamente mágicos no son posibles en tableros de $n \times n$ casillas, con números impares y se cree que tampoco son posibles en el tablero de ajedrez de 8×8." (p. 228)

Por otra parte, se resalta que uno de los matemáticos emblemáticos que realizaron estudios sobre cuadrados mágicos fue Pascal, sin embargo y de acuerdo a lo que afirman Martinon & Molina (s.f.) no se cuenta con registros escritos de dichos estudios.

Muchos de los estudios que se realizan sobre los cuadrados mágicos se enfocan en la búsqueda de métodos de construcción de los mismos. Uno de los más relevantes, según lo manifiesta Bulajich (2009), es el publicado por el matemático, escritor, poeta y diplomático francés Simón de la Loubère (1642-1729) en el año 1963; conocido como *siamés* o *hindú* y se utiliza en la construcción de cuadrados mágicos de lado impar.

El método hindú o siamés, es utilizado para la construcción de cuadrados mágicos de lado impar, donde los números que los conforman, corresponden a los términos de una sucesión aritmética. Los pasos para construir un cuadrado mágico con este método se describen a continuación:

1) El primer término de la sucesión aritmética se ubica en la celda central de la primera fila.

2) Todo término siguiente a otro, se ubica en la celda que le sigue diagonalmente, hacia arriba y hacia la derecha, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:
   a) Si el término se sale del contorno del cuadrado mágico por la parte superior, entonces se ubica en la última fila, manteniendo la columna de donde se supone debía situarse.
   b) Si el término se sale del contorno del cuadrado mágico por la parte derecha, entonces se ubica en la primera columna, manteniendo la fila de donde se supone debía situarse.
   c) Cuando la celda ya se encuentra ocupada por un término de la sucesión, el término consecutivo se coloca en la celda inmediatamente inferior a la del número precedente.
   d) Si el término se sale del contorno del cuadrado mágico por la parte superior y derecha, el término consecutivo se coloca en la celda inmediatamente inferior a la del número precedente.

El siguiente es un ejemplo de un cuadrado mágico construido por este método, compuesto por los 25 primeros términos de la sucesión aritmética:

{5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53}

		5		
	13			
11	15			
				9
			7	

37	51	5	19	33
49	13	17	31	35
11	15	29	43	47
23	27	41	45	9
25	39	53	7	21

Figura 8. Ejemplo de cuadrado mágico construido por el método hindú.

A continuación se presentan los conceptos relacionados con los cuadrados mágicos, incluyendo una versión formal del método hindú, utilizados en la presente investigación.

2.3.2. Método Hindú para la construcción de cuadrados mágicos

Definición 1. Una matriz real A de tamaño $m \times n$ es un arreglo rectangular de $m \cdot n$ números reales dispuestos en m filas y n columnas, escritos entre corchetes como sigue a continuación:

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

Donde los subíndices indican la fila y la columna de localización en la matriz de cada número real; a los $a_{1,1},\ a_{1,2}, \dots ,\ a_{m,n}$ se les llama elementos o entradas de la matriz. (si $m = n$, la matriz recibe el nombre de cuadrada). (Jiménez, 2004, p. 2)

Definición 2. Una *sucesión aritmética* de números reales $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de la forma:

$$b, b+c, b+2c, b+3c, b+4c, \dots$$

es decir, $b_1 = b;\ b_2 = b + c;\ b_3 = b + 2c; \dots;\ b_h = b + (h-1)c; \dots; b_n = b + (n-1)c$. El número $b \in \mathbb{R}$ y es el primer término de la sucesión; $c \in \mathbb{R}$ y es la diferencia común de la sucesión. (Stewart, Lothar & Watson, 2012, p. 795)

Definición 3. Un *cuadrado mágico* es una matriz cuadrada, en la cual la suma de las entradas de cada columna, fila y diagonal, correspondientes a números enteros es la misma.

Definición 4. La suma de cada fila columna o diagonal en un cuadrado mágico recibe el nombre de *cifra mágica*.

2.3.3. Descripción del método

Definición 5. Un cuadrado mágico construido por el *método hindú*, es una matriz de tamaño $n \times n$ (con $n = 2k + 1,\ k \in \mathbb{N}$), donde sus entradas $(a_{1,1},\ a_{1,2}, \dots ,\ a_{m,n})$ corresponden a los n^2 primeros términos consecutivos de una sucesión aritmética $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$; que cumple con las siguientes condiciones:

i) $a_{1,k+1}$ corresponde al primer término de la sucesión, es decir b_1.

ii) Si $b_h = a_{i,j}$ entonces $b_{h+1} = a_{i-1,j+1}$, con $1 \leq h \leq n^2$, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

a) Si $i - 1 = 0$ y $j + 1 \neq 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{2k+1,j+1}$.
b) Si $i - 1 \neq 0$ y $j + 1 = 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{i-1,1}$.
c) Si $i - 1 = 0$ y $j + 1 = 2k + 2$, entonces $b_{h+1} = a_{2,2k+1}$.
d) Si en $a_{i-1,j+1}$ se tiene un término de la sucesión b_g tal que $g < h$, entonces $b_{h+1} = a_{i+1,j}$.

Como consecuencia de las condiciones descritas, se cumple que la suma de las entradas pertenecientes a cada fila, columna y diagonal es igual. (La demostración de éste hecho se hará más adelante, luego de analizar algunos aspectos que serán útiles para su comprensión).

De acuerdo a lo anterior, se muestra un ejemplo correspondiente a la construcción de un cuadrado mágico de lado 5, es decir una matriz 5×5, cuyas entradas son los términos de la sucesión: $15, 13, 11, 9, \ldots, -31, -33$ (sucesión cuyo primer término es 15 y de diferencia común -2); esto indica que $k = 2, b = 15, c = -2$.

1) El número 15 corresponde a la entrada $a_{1,3}$, de acuerdo a la condición *i)*:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 15 & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} & a_{5,5} \end{bmatrix}$$

2) El siguiente término de la sucesión, es decir el número 13 corresponde a la entrada $a_{5,4}$, de acuerdo a la restricción a) de la condición *ii):*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 15 & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & a_{4,5} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & 13 & a_{5,5} \end{bmatrix}$$

3) El término 11 corresponde a la entrada $a_{4,5}$ de acuerdo a la condición *ii)* y el siguiente a este, es decir el número 9 se asigna a $a_{3,1}$, según se indica en la restricción b) de la condición *ii)*:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 15 & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ 9 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & 11 \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & 13 & a_{5,5} \end{bmatrix}$$

4) El término 7 corresponde a la entrada $a_{2,2}$ de acuerdo a la condición *ii)* y el siguiente término, es decir, el número 5 se asigna a $a_{3,2}$, según se indica en la restricción d) de la condición *ii)*:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 15 & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & 7 & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ 9 & 5 & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & 11 \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & 13 & a_{5,5} \end{bmatrix}$$

5) Los términos de la sucesión 3 a -13 se localizan en forma análoga a los pasos descritos anteriormente. El número -15 corresponde a la entrada $a_{2,5}$, según se indica en la restricción c) de la condición *ii)*:

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 15 & 1 & -13 \\ a_{2,1} & 7 & 3 & -11 & -15 \\ 9 & 5 & -9 & a_{3,4} & a_{3,5} \\ -3 & -7 & a_{4,3} & a_{4,4} & 11 \\ -5 & a_{5,2} & a_{5,3} & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

6) Finalmente, se localizan los términos restantes de la sucesión de acuerdo a las anteriores condiciones, dando como resultado el siguiente cuadrado mágico:

$$\begin{bmatrix} -17 & -31 & 15 & 1 & -13 \\ -29 & 7 & 3 & -11 & -15 \\ 9 & 5 & -9 & -23 & -27 \\ -3 & -7 & -21 & -25 & 11 \\ -5 & -19 & -33 & 13 & -1 \end{bmatrix}$$

Obsérvese que la suma de las entradas de cada una de las filas, columnas y diagonales es -45. (Domínguez & Medina (2015), pp. 111-113)

Notación: de acuerdo a la construcción de los cuadrados mágicos descrita anteriormente, resulta evidente que, basta conocer tres variables para identificar el cuadrado mágico resultante de la construcción con el *método hindú*, tales variables son: k, b y c, las cuales corresponden respectivamente a la mitad, del número de filas o columnas menos uno ($(n-1)/2$), el primer término de la sucesión aritmética y la diferencia común de los términos de la sucesión. Luego, todo cuadrado mágico construido con el *método hindú* puede representarse por medio de la terna $[k, b, c]$. Es así, que el cuadrado del ejemplo anterior puede notarse como: $[2, 15, -2]$.

2.3.4. Forma general del cuadrado mágico $[\boldsymbol{k}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}]$

La siguiente matriz, muestra la forma general de las entradas de los cuadrados mágicos de lado impar, construidos por el *método hindú*; esto corresponde a la representación matricial de la terna $[k, b, c]$.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,k} & a_{1,k+1} & a_{1,k+2} & \cdots & a_{1,2k-1} & a_{1,2k} & a_{1,2k+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,k} & a_{2,k+1} & a_{2,k+2} & \cdots & a_{2,2k-1} & a_{2,2k} & a_{2,2k+1} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,k} & a_{3,k+1} & a_{3,k+2} & \cdots & a_{3,2k-1} & a_{3,2k} & a_{3,2k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{k,1} & a_{k,2} & a_{k,3} & \cdots & a_{k,k} & a_{k,k+1} & a_{k,k+2} & \cdots & a_{k,2k-1} & a_{k,2k} & a_{k,2k+1} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & a_{k+1,3} & \cdots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & a_{k+1,k+2} & \cdots & a_{k+1,2k-1} & a_{k+1,2k} & a_{k+1,2k+1} \\ a_{k+2,1} & a_{k+2,2} & a_{k+2,3} & \cdots & a_{k+2,k} & a_{k+2,k+1} & a_{k+2,k+2} & \cdots & a_{k+2,2k-1} & a_{k+2,2k} & a_{k+2,2k+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2k-1,1} & a_{2k-1,2} & a_{2k-1,3} & \cdots & a_{2k-1,k} & a_{2k-1,k+1} & a_{2k-1,k+2} & \cdots & a_{2k-1,2k-1} & a_{2k-1,2k} & a_{2k-1,2k+1} \\ a_{2k,1} & a_{2k,2} & a_{2k,3} & \cdots & a_{2k,k} & a_{2k,k+1} & a_{2k,k+2} & \cdots & a_{2k,2k-1} & a_{2k,2k} & a_{2k,2k+1} \\ a_{2k+1,1} & a_{2k+1,2} & a_{2k+1,3} & \cdots & a_{2k+1,k} & a_{2k+1,k+1} & a_{2k+1,k+2} & \cdots & a_{2k+1,2k-1} & a_{2k+1,2k} & a_{2k+1,2k+1} \end{bmatrix}$$

La forma general de las entradas de la matriz pueden representarse como una función de tres variables $f(k,b,c)$; este tipo de representación permite describir algunos conceptos, que se tratan a lo largo de esta sección.

$a_{1,1} = b + c(2k^2 + 3k + 2)$
$a_{1,2} = b + c(2k^2 + 5k + 5)$
$a_{1,3} = b + c(2k^2 + 7k + 8)$
$\vdots$
$a_{1,k} = b + c(4k^2 + 4k - 1)$
$a_{1,k+1} = b$
$a_{1,k+2} = b + c(2k + 3)$
$\vdots$
$a_{1,2k-1} = b + c(2k^2 - k - 6)$
$a_{1,2k} = b + c(2k^2 + k - 3)$
$a_{1,2k+1} = b + c(2k^2 + 3k)$

$a_{2,1} = b + c(2k^2 + 5k + 4)$
$a_{2,2} = b + c(2k^2 + 7k + 7)$
$a_{2,3} = b + c(2k^2 + 9k + 10)$
$\vdots$
$a_{2,k} = b + c(2k)$
$a_{2,k+1} = b + c(2k + 2)$
$a_{2,k+2} = b + c(4k + 5)$
$\vdots$
$a_{2,2k-1} = b + c(2k^2 + k - 4)$
$a_{2,2k} = b + c(2k^2 + 3k - 1)$
$a_{2,2k+1} = b + c(2k^2 + 3k$

$a_{3,1} = b + c(2k^2 + 7k + 6)$
$a_{3,2} = b + c(2k^2 + 9k + 9)$
$a_{3,3} = b + c(2k^2 + 11k + 12)$
$\vdots$
$a_{3,k} = b + c(2k + 1)$
$a_{3,k+1} = b + c(4k + 4)$
$a_{3,k+2} = b + c(6k + 7)$
$\vdots$
$a_{3,2k-1} = b + c(2k^2 + 3k - 2)$
$a_{3,2k} = b + c(2k^2 + 5k + 1)$
$a_{3,2k+1} = b + c(2k^2 + 5k + 3)$

$a_{k,1} = b + c(4k^2 + 3k)$
$a_{k,2} = b + c(k + 2)$
$a_{k,3} = b + c(3k + 5)$
$\vdots$
$a_{k,k} = b + c(2k^2 - 2k - 5)$
$a_{k,k+1} = b + c(2k^2 - 2)$
$a_{k,k+2} = b + c(2k^2 + 2k + 1)$
$\vdots$
$a_{k,2k-1} = b + c(4k^2 - 3k - 9)$
$a_{k,2k} = b + c(4k^2 - k - 6)$
$a_{k,2k+1} = b + c(4k^2 + k - 3)$

$a_{k+1,1} = b + c(k + 1)$
$a_{k+1,2} = b + c(3k + 4)$
$a_{k+1,3} = b + c(5k + 7)$
$\vdots$
$a_{k+1,k} = b + c(2k^2 - 3)$
$a_{k+1,k+1} = b + c(2k^2 + 2k)$
$a_{k+1,k+2} = b + c(2k^2 + 4k + 3)$
$\vdots$
$a_{k+1,2k-1} = b + c(4k^2 - k - 7)$
$a_{k+1,2k} = b + c(4k^2 + k - 4)$
$a_{k+1,2k+1} = b + c(4k^2 + 3k - 1)$

$a_{k+2,1} = b + c(3k + 3)$
$a_{k+2,2} = b + c(5k + 6)$
$a_{k+2,3} = b + c(7k + 9)$
$\vdots$
$a_{k+2,k} = b + c(2k^2 + 2k - 1)$
$a_{k+2,k+1} = b + c(2k^2 + 4k + 2)$
$a_{k+2,k+2} = b + c(2k^2 + 6k + 5)$
$\vdots$
$a_{k+2,2k-1} = b + c(4k^2 + k - 5)$
$a_{k+2,2k} = b + c(4k^2 + 3k - 2)$
$a_{k+2,2k+1} = b + c(k)$

$a_{2k-1,1} = b + c(2k^2 - k - 3)$
$a_{2k-1,2} = b + c(2k^2 - k - 1)$
$a_{2k-1,3} = b + c(2k^2 + k + 2)$
$\vdots$
$a_{2k-1,k} = b + c(4k^2 - 2k - 7)$
$a_{2k-1,k+1} = b + c(4k^2 - 4)$
$a_{2k-1,k+2} = b + c(4k^2 + 2k - 1)$
$\vdots$
$a_{2k-1,2k-1} = b + c(2k^2 - 7k - 12)$
$a_{2k-1,2k} = b + c(2k^2 - 5k - 9)$
$a_{2k-1,2k+1} = b + c(2k^2 - 3k - 6)$

$a_{2k,1} = b + c(2k^2 + k - 1)$
$a_{2k,2} = b + c(2k^2 + k + 1)$
$a_{2k,3} = b + c(2k^2 + 3k + 4)$
$\vdots$
$a_{2k,k} = b + c(4k^2 - 5)$
$a_{2k,k+1} = b + c(4k^2 + 2k - 2)$
$a_{2k,k+2} = b + c(4k^2 + 2k)$
$\vdots$
$a_{2k,2k-1} = b + c(2k^2 - 5k - 10)$
$a_{2k,2k} = b + c(2k^2 - 3k - 7)$
$a_{2k,2k+1} = b + c(2k^2 - k - 4)$

$a_{2k+1,1} = b + c(2k^2 + k)$
$a_{2k+1,2} = b + c(2k^2 + 3k + 3)$
$a_{2k+1,3} = b + c(2k^2 + 5k + 6)$
$\vdots$
$a_{2k+1,k} = b + c(4k^2 + 2k - 3)$
$a_{2k+1,k+1} = b + c(4k^2 + 4k)$
$a_{2k+1,k+2} = b + c$
$\vdots$
$a_{2k+1,2k-1} = b + c(2k^2 - 3k - 8)$
$a_{2k+1,2k} = b + c(2k^2 - k - 5)$
$a_{2k+1,2k+1} = b + c(2k^2 + k - 2)$

Teorema 1.

En la matriz $[k, b, c]$, la suma de las entradas pertenecientes a cada fila, columna y diagonal es la misma.

Demostración
La suma de la fila i corresponde a:

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{i,j}.$$

En particular, la suma de las entradas pertenecientes a la fila 1 es:

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{1,j} = a_{1,1} + a_{1,2} + a_{1,3} + \cdots + a_{1,k} + a_{1,k+1} + a_{1,k+2} + \cdots + a_{1,2k-1} + a_{1,2k} + a_{1,2k+1}.$$

Organizando y agrupando los términos de forma conveniente:

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{1,j} = (a_{1,1} + a_{1,2k+1}) + \left(a_{1,2} + a_{1,2k}\right) + \cdots + \left(a_{1,k} + a_{1,k+2}\right) + a_{1,k+1}.$$

Se tiene:

$$a_{1,1} + a_{1,2k+1} = b + c(2k^2 + 3k + 2) + b + c(2k^2 + 3k) = 2b + c(4k^2 + 6k + 2)$$

$$a_{1,2} + a_{1,2k} = b + c(2k^2 + 5k + 5) + b + c(2k^2 + k - 3) = 2b + c(4k^2 + 6k + 2)$$

$$\vdots$$

$$a_{1,k} + a_{1,k+2} = b + c(4k^2 + 4k - 1) + b + c(2k + 3) = 2b + c(4k^2 + 6k + 2)$$

$$a_{1,k+1} = b.$$

Obsérvese que

$$(a_{1,1} + a_{1,2k+1}) + \left(a_{1,2} + a_{1,2k}\right) + \cdots + \left(a_{1,k} + a_{1,k+2}\right) = k\left(2b + c(4k^2 + 6k + 2)\right).$$

Luego,

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{1,j} = k\left(2b + c(4k^2 + 6k + 2)\right) + b = b(2k + 1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k).$$

La suma de las entradas de la segunda fila es:

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{2,j} = a_{2,1} + a_{2,2} + \cdots + a_{2,k-1} + a_{2,k} + a_{2,k+1} + \cdots a_{2,2k-2} + a_{2,2k-1} + a_{2,2k} + a_{2,2k+1}.$$

Organizando y agrupando los términos de forma conveniente (esta organización es diferente a la utilizada en la primera fila):

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{2,j} = (a_{2,1} + a_{2,2k-1}) + \left(a_{2,2} + a_{2,2k-2}\right) + \cdots + (a_{2,k-1} + a_{2,k+1}) + (a_{2,2k} + a_{2,2k+1}) + a_{2,k}.$$

Se tiene:

$$a_{2,1} + a_{2,2k-1} = b + c(2k^2 + 5k + 4) + b + c(2k^2 + k - 4) = 2b + c(4k^2 + 6k)$$

$$a_{2,2} + a_{2,2k-2} = b + c(2k^2 + 7k + 7) + b + c(2k^2 - k - 7) = 2b + c(4k^2 + 6k)$$

$$\vdots$$

$$a_{2,k-1} + a_{2,k+1} = b + c(4k^2 + 4k - 2) + b + c(2k + 2) = 2b + c(4k^2 + 6k)$$

$$a_{2,2k} + a_{2,2k+1} = b + c(2k^2 + 3k - 1) + b + c(2k^2 + 3k + 1) = 2b + c(4k^2 + 6k)$$

$$a_{2,k} = b + c(2k).$$

Luego,

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{2,j} = k\left(2b + c(4k^2 + 6k)\right) + b + c(2k) = b(2k + 1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k).$$

Análogamente al análisis realizado y agrupando como se indica, se obtiene:

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2k+1} a_{3,j} &= (a_{3,1} + a_{3,2k-1}) + \cdots + \left(a_{3,k-2} + a_{3,k+2}\right) + \left(a_{3,2k} + a_{3,2k+1}\right) \\ &\quad + \left(a_{3,k-1} + a_{3,k} + a_{3,k+1}\right) \\ &= (k-1)\left(2b + c(4k^2 + 10k + 4)\right) + 3b + c(8k + 4) \\ &= b(2k + 1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)\end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{2k+1} a_{k,j} &= (a_{k,2} + a_{k,2k+1}) + \left(a_{k,3} + a_{k,2k}\right) + \cdots + \left(a_{k,k+1} + a_{k,k+2}\right) + a_{k,1} \\ &= k\left(2b + c(4k^2 + 2k - 1)\right) + b + c(4k^2 + 3k) \\ &= b(2k + 1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{k+1,j} = (a_{k+1,1} + a_{k+1,2k+1}) + \left(a_{k+1,2} + a_{k+1,2k}\right) + \cdots + \left(a_{k+1,k} + a_{k+1,k+2}\right)$$

$$+ a_{k+1,k+1}$$

$$= k\left(2b + c(4k^2 + 4k)\right) + b + c(2k^2 + 2k)$$

$$= b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{k+2,j} = (a_{k+2,1} + a_{k+2,2k}) + \left(a_{k+2,2} + a_{k+2,2k-1}\right) + \cdots + \left(a_{k+2,k} + a_{k+2,k+1}\right)$$

$$+ a_{k+2,2k+1}$$

$$= k\left(2b + c(4k^2 + 6k + 1)\right) + b + c(k)$$

$$= b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{2k-1,j} = (a_{2k-1,3} + a_{2k-1,2k-1}) + \cdots + \left(a_{2k-1,k} + a_{2k-1,k+4}\right) + \left(a_{2k-1,1} + a_{2k-1,2}\right)$$

$$+ \left(a_{2k-1,k+1} + a_{2k-1,k+2} + a_{2k-1,k+3}\right)$$

$$= (k-1)\left(2b + c(4k^2 - 2k - 4)\right) + 3b + c(12k^2 + 4k - 4)$$

$$= b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{2k,j} = (a_{2k,3} + a_{2k,2k+1}) + \cdots + \left(a_{2k,k+1} + a_{2k,k+3}\right) + \left(a_{2k,1} + a_{2k,2}\right) + a_{2k,k+2}$$

$$= k\left(2b + c(4k^2 + 2k)\right) + b + c(4k^2 + 2k)$$

$$= b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{2k+1,j} = (a_{2k+1,1} + a_{2k+1,2k+1}) + (a_{2k+1,2} + a_{2k+1,2k}) + \cdots + (a_{2k+1,k}$$

$$+ a_{2k+1,k+2}) + a_{2k+1,k+1}$$

$$= k\left(2b + c(4k^2 + 2k - 2)\right) + b + c(4k^2 + 4k)$$

$$= b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k).$$

Además, La suma de la columna j corresponde a:

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,j}.$$

De forma análoga al análisis realizado con las filas y agrupando como se indica, se obtiene:

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,1} = (a_{1,1} + a_{2k-1,1}) + \left(a_{2,1} + a_{2k-2,1}\right) + \cdots + \left(a_{k-1,1} + a_{k+1,1}\right)$$
$$+ \left(a_{2k,1} + a_{2k+1,1}\right) + a_{k,1}$$
$$= k\left(2b + c(4k^2 + 2k - 1)\right) + b + c(4k^2 + 3k)$$
$$= b(2k + 1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,2} = (a_{1,2} + a_{2k-3,2}) + \cdots + \left(a_{k-2,2} + a_{k,2}\right) + \left(a_{2k-2,2} + a_{2k+1,2}\right)$$
$$+ \left(a_{k-1,2} + a_{2k,2} + a_{2k-1,2}\right)$$
$$= (k - 1)\left(2b + c(4k^2 + 2k + 1)\right) + 3b + c(8k^2 + 3k + 1)$$
$$= b(2k + 1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,3} = (a_{1,3} + a_{2k-5,3}) + \cdots + \left(a_{k-3,3} + a_{k-1,3}\right) + \left(a_{2k-4,3} + a_{2k+1,3}\right)$$
$$+ \left(a_{2k-3,3} + a_{2k,3}\right) + \left(a_{2k-2,3} + a_{2k-1,3}\right) + a_{k-2,3}$$
$$= (k - 2)\left(2b + c(4k^2 + 2k + 3)\right) + 4b + c(8k^2 + 4) + b + c(4k^2 + 3k + 2)$$
$$= b(2k + 1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,k} = \left(a_{4,k} + a_{2k+1,k}\right) + \left(a_{5,k} + a_{2k,k}\right) + \cdots + (a_{k+2,k} + a_{k+3,k}) + \left(a_{1,k} + a_{3,k}\right)$$
$$+ a_{2,k}$$
$$= k\left(2b + c(4k^2 + 6k)\right) + b + c(2k)$$
$$= b(2k + 1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,k+1} = \left(a_{1,k+1} + a_{2k+1,k+1}\right) + \left(a_{2,k+1} + a_{2k,k+1}\right) + \cdots + \left(a_{k,k+1} + a_{k+2,k+1}\right) + a_{k+1,k+1}$$

$$= k\left(2b + c(4k^2 + 4k)\right) + b + c(2k^2 + 2k)$$

$$= b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,k+2} = \left(a_{1,k+2} + a_{2k-2,k+2}\right) + \left(a_{2,k+2} + a_{2k-3,k+2}\right) + \cdots + \left(a_{k-1,k+2} + a_{k,k+2}\right) + \left(a_{2k-1,k+2} + a_{2k+1,k+2}\right) + a_{2k,k+2}$$

$$= k\left(2b + c(4k^2 + 2k)\right) + b + c(4k^2 + 2k)$$

$$= b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\vdots$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,2k-1} = \left(a_{7,2k-1} + a_{2k+1,2k-1}\right) + \cdots + \left(a_{k+3,2k-1} + a_{k+5,2k-1}\right) + \left(a_{1,2k-1} + a_{6,2k-1}\right) + \left(a_{3,2k-1} + a_{4,2k-1}\right) + \left(a_{2,2k-1} + a_{5,2k-1}\right) + a_{k+4,2k-1}$$

$$= (k-2)\left(2b + c(4k^2 + 6k - 3)\right) + 4b + c(8k^2 + 16k - 4) + b + c(k-2)$$

$$= b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,2k} = \left(a_{5,2k} + a_{2k+1,2k}\right) + \cdots + \left(a_{k+2,2k} + a_{k+4,2k}\right) + \left(a_{1,2k} + a_{4,2k}\right) + \left(a_{2,2k} + a_{3,2k} + a_{k+3,2k}\right)$$

$$= (k-1)\left(2b + c(4k^2 + 6k - 1)\right) + 3b + c(4k^2 + 9k - 1)$$

$$= b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,2k+1} = \left(a_{3,2k+1} + a_{2k+1,2k+1}\right) + \left(a_{4,2k+1} + a_{2k,2k+1}\right) + \cdots + \left(a_{k+1,2k+1} + a_{k+3,2k+1}\right) + \left(a_{1,2k+1} + a_{2,2k+1}\right) + a_{k+2,2k+1}$$

$$= k\left(2b + c(4k^2 + 6k + 1)\right) + b + c(k)$$

$$= b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k).$$

La suma de las entradas de las diagonales es:

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{2k+2-i,i} \qquad \sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,i}.$$

Las cuales pueden calcularse de forma análoga al proceso que se viene desarrollando, obteniendo lo siguiente:

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{2k+2-i,i} = (a_{1,2k+1} + a_{2k+1,1}) + \left(a_{2,2k} + a_{2k,2}\right) + \cdots + \left(a_{k,k+2} + a_{k+2,k}\right)$$
$$+ a_{k+1,k+1}$$
$$= k\left(2b + c(4k^2 + 4k)\right) + b + c(2k^2 + 2k)$$
$$= b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k)$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{ii} = (a_{1,1} + a_{2k+1,2k+1}) + \left(a_{2,2} + a_{2k,2k)}\right) + \cdots + \left(a_{k,k} + a_{k+2,k+2}\right) + a_{k+1,k+1}$$
$$= k\left(2b + c(4k^2 + 4k)\right) + b + c(2k^2 + 2k)$$
$$= b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k).$$

Luego, puede concluirse que la suma de las entradas de las filas, columnas y diagonales es la misma. ☐

Corolario 1. La cifra mágica correspondiente al cuadrado mágico $[k, b, c]$ tiene la forma:

$$b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k).$$

Definición 6. Traza de una matriz

Sea $A = \left[a_{ij}\right]$ una matriz real de tamaño $n \times n$, la suma de los elementos de la diagonal principal se llama traza de A y se denota como $tr(A)$, o sea

$$tr\,(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

(Jiménez, 2004, p. 9)

Corolario 2. La cifra mágica de $[k,b,c]$, es también $tr\ ([k,b,c])$.

Definición 7. Transpuesta

Si $A=[a_{i,j}]$ es una matriz real de tamaño $m\times n$, se llama transpuesta de A a la matriz $D=[d_{i,j}]$ de tamaño $n\times m$ cuyo elemento $d_{i,j}=a_{j,i}$. Se denota por A^t. (Jiménez, 2004, p. 6)

Teorema 2. La transpuesta de la matriz $[k,b,c]$ cumple con la definición usual de cuadrado mágico (Teorema 1.), es decir que la suma de las entradas de filas, columnas y diagonales de la matriz $[k,b,c]^t$ es la misma.

Demostración

En la matriz $[k,b,c]$ como consecuencia del Teorema 1 se cumple que:

$$\sum_{j=1}^{2k+1} a_{i,j}=b(2k+1)+c(4k^3+6k^2+2k), \forall i=1,2,\dots,2k+1$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,j}=b(2k+1)+c(4k^3+6k^2+2k), \forall j=1,2,\dots,2k+1$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{2k+2-i,i}=b(2k+1)+c(4k^3+6k^2+2k)$$

$$\sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,i}=b(2k+1)+c(4k^3+6k^2+2k)$$

La matriz $[k,b,c]^t=[d_{i,j}]$, tal que $d_{i,j}=a_{j,i}$, es así que

$$\sum_{i=1}^{2k+1} d_{i,j}=\sum_{j=1}^{2k+1} a_{j,i}=b(2k+1)+c(4k^3+6k^2+2k), \forall i=1,2,\dots,2k+1$$

$$\sum_{j=1}^{2k+1} d_{i,j}=\sum_{i=1}^{2k+1} a_{j,i}=b(2k+1)+c(4k^3+6k^2+2k), \forall j=1,2,\dots,2k+1$$

$$\sum_{j=1}^{2k+1} d_{j,2k+2-j}=\sum_{i=1}^{2k+1} a_{2k+2-i,i}=b(2k+1)+c(4k^3+6k^2+2k)$$

$$\sum_{j=1}^{2k+1} d_{j,j} = \sum_{i=1}^{2k+1} a_{i,i} = b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k).$$

Luego la matriz $[k, b, c]^t$ cumple con la definición usual de cuadrado mágico y la cifra mágica de esta coincide con la cifra mágica de la matriz $[k, b, c]$. Esto es:

$$tr\ ([k, b, c]) = tr([k, b, c]^t) = b(2k+1) + c(4k^3 + 6k^2 + 2k). \ \square$$

Definición 8. Suma de matrices

Dadas $A = [a_{i,j}]$ y $B = [b_{i,j}]$, matrices de igual tamaño $m \times n$, la suma $A + B$, es una matriz $C = [c_{i,j}]$ de tamaño $m \times n$, donde

$$c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j} \qquad \begin{array}{l} \forall\ i = 1, 2, \ldots, m \\ \forall\ j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Teorema 3. Propiedades básicas de la suma

Para todas A, B y C matrices de tamaño $m \times n$, se verifican las siguientes propiedades

1. Conmutativa: $A + B = B + A$.
2. Asociativa: $(A + B) + C = A + (B + C)$.
3. Existencia de módulo: *Existe una matriz O de tamaño $m \times n$, tal que para toda matriz A de tamaño $m \times n$, se verifica que*

$$A + O = O + A = A.$$

   En nuestro caso, la matriz *O* es la matriz nula, cuyas entradas son todas iguales a cero.

4. Elemento opuesto: Para toda matriz A de tamaño $m \times n$, existe una matriz llamada opuesta de A y denotada por $-A$ de tamaño $m \times n$, que verifica

$$A + (-A) = O.$$

Demostración
Sean $A = [a_{i,j}]$, $B = [b_{i,j}]$ y $C = [c_{i,j}]$.

1. $A + B = [a_{i,j} + b_{i,j}] = [b_{i,j} + a_{i,j}] = B + A$.
2. $(A + B) + C = [a_{i,j} + b_{i,j}] + [c_{i,j}] = [a_{i,j} + b_{i,j} + c_{i,j}]$

$$= \left[a_{i,j} + (b_{i,j} + c_{i,j})\right] = \left[a_{i,j}\right] + \left[b_{i,j} + c_{i,j}\right] = A + (B + C).$$

3. $A + O = \left[a_{i,j}\right] + O = \left[a_{i,j} + 0\right] = \left[0 + a_{i,j}\right] = O + \left[a_{i,j}\right] = O + A = A.$

4. Al tomar $-A = \left[-a_{i,j}\right]$, se verifica que

$$A + (-A) = \left[a_{i,j} + \left(-a_{i,j}\right)\right] = [0] = O. \square$$

(Jiménez, 2004, pp. 3-4)

Teorema 4. La suma de dos cuadrados mágicos construidos por el método hindú es un cuadrado mágico que también puede obtenerse por dicho método.

Demostración
Sean $[k, b, c] = [a_{i,j}]$ y $[k, e, f] = [d_{i,j}]$ (dos cuadrados mágicos construidos por el método hindú de igual tamaño). Puede verificarse que

$$a_{i,j} = b_h = b + (h-1)c \qquad \forall\, i = 1, 2, \dots, 2k+1$$

$$\forall\, j = 1, 2, \dots, 2k+1$$

$$d_{i,j} = e_h = e + (h-1)f \qquad 1 \le h \le (2k+1)^2$$

Luego

$$a_{i,j} + d_{i,j} = b_h + e_h = b + (h-1)c + e + (h-1)f$$

$$= (b+e) + (h-1)(c+f).$$

Con lo que se tiene que:

$$[k, b, c] + [k, e, f] = \left[a_{i,j} + d_{i,j}\right] = [k, b+e, c+f]. \square$$

Corolario 3. La cifra mágica de $[k, b, c] + [k, e, f]$ es:

$$(b+e)(2k+1) + (c+f)(4k^3 + 6k^2 + 2k).$$

Definición 9. El producto de una matriz $A = \left[a_{i,j}\right]$ de tamaño $m \times n$, por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, es una matriz $C = \left[c_{i,j}\right]$ del mismo tamaño de A, de elementos

$$c_{i,j} = \alpha a_{i,j} \qquad \forall\, i = 1, 2, \dots, m \qquad \forall\, j = 1, 2, \dots, n$$

Esto es, los elementos de C se obtienen multiplicando los elementos correspondientes de A por α. El resultado de efectuar el producto de una matriz A por un escalar α, se simboliza por αA y *se lee multiplicación de A por* α.

Teorema 5. Propiedades de la multiplicación por un escalar

Para todas A y B de tamaño $m \times n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se satisface que

a) $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$.

b) $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

c) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$.

d) $1A = A$.

Demostración
Sean $A = [a_{i,j}]$ y $B = [b_{i,j}]$, entonces

a) $\alpha(A+B) = \alpha[a_{i,j} + b_{i,j}] = [\alpha(a_{i,j} + b_{i,j})] = [\alpha a_{i,j} + \alpha b_{i,j}]$

$= [\alpha a_{i,j}] + [\alpha b_{i,j}] = \alpha[a_{i,j}] + \alpha[b_{i,j}] = \alpha A + \alpha B$.

b) $(\alpha+\beta)A = (\alpha+\beta)[a_{i,j}] = [(\alpha+\beta)a_{i,j}] = [\alpha a_{i,j} + \beta a_{i,j}]$

$= [\alpha a_{i,j}] + [\beta a_{i,j}] = \alpha[a_{i,j}] + \beta[a_{i,j}] = \alpha A + \beta A$.

c) $\alpha(\beta A) = \alpha(\beta[a_{i,j}]) = \alpha[\beta a_{i,j}] = [\alpha\beta a_{i,j}] = (\alpha\beta)[a_{i,j}] = (\alpha\beta)A$.

d) $1A = 1[a_{i,j}] = [1a_{i,j}] = [a_{i,j}] = A$. □

(Jiménez, 2004, pp. 4-5)

Teorema 6. El producto de un escalar real, por un cuadrado mágico construido por el método hindú, es un cuadrado mágico que puede construirse por el mismo método.

Demostración
Sea $[k, b, c] = [a_{i,j}]$ y el escalar $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces.

$$\alpha[k,b,c] = \alpha[a_{i,j}] = \alpha[b_h] \qquad \forall\, i = 1, 2, \dots, 2k+1$$

$$\forall\, j = 1, 2, \dots, 2k+1$$

$$= \alpha[b + (h-1)c] = [\alpha b + (h-1)\alpha c] \qquad 1 \leq h \leq (2k+1)^2$$

Con lo que se tiene

$$\alpha[k, b, c] = [k, \alpha b, \alpha c]. \square$$

Corolario 4. La cifra mágica de $\alpha[k, b, c]$ es:

$$\alpha b(2k + 1) + \alpha c(4k^3 + 6k^2 + 2k).$$

Corolario 5. Por los teoremas 4 y 5 los cuadrados mágicos de tamaño $m \times n$ forman un subespacio vectorial del espacio de matrices reales de tamaño $m \times n$.

2.3.5. La magia en el producto

Este apartado del marco teórico, es un resultado no previsto en el diseño de la propuesta didáctica. Surge a raíz de la exploración de la aplicación del método hindú, a un arreglo matricial cuadrado cuyas entradas son los términos de una sucesión geométrica, propuesto por un grupo de estudiantes de la población con la que se realizó la investigación. (Ver Figura 44).

Definición 10. Una *sucesión geométrica* de números reales $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de la forma:

$$g, gr, gr^2, gr^3, gr^4, \dots$$

es decir, $g_1 = g;\ g_2 = gr;\ g_3 = gr^2; \dots;\ g_h = gr^{h-1}; \dots; g_n = gr^{n-1}$.
El número $g \in \mathbb{R}$ es el primer término de la sucesión; $r \in \mathbb{R}$ es la razón común de la sucesión. (Stewart, Lothar & Watson, 2012, p. 800).

Teorema 7. En una matriz de tamaño $n \times n$ (con $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$), cuyas entradas son los n^2 primeros términos de una sucesión geométrica $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ubicados de acuerdo al método hindú; el producto de las entradas de cada fila, columna o diagonal es el mismo.

Demostración
Sea $[k, g, r]$ la matriz de matriz de tamaño $n \times n$ (con $n = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$), cuyas entradas $\left[a_{i,j}\right]$ son los n^2 primeros términos de una sucesión geométrica $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ubicados de acuerdo al método hindú. Se tiene,

$$a_{i,j} = g_h = gr^{h-1} \qquad \begin{array}{c} \forall\, i = 1, 2, \dots, 2k + 1. \\ \forall\, j = 1, 2, \dots, 2k + 1. \\ 1 \leq h \leq (2k + 1)^2. \end{array}$$

Puede identificarse que los exponentes de la razón r, corresponden a los términos de la sucesión aritmética

$$0, 1, 2, 3, \dots, h - 1, \dots, n^2 - 1.$$

Así pues la organización de los exponentes de la matriz $[k, g, r]$, coinciden con el cuadrado mágico $[k, 0, 1]$.

Luego por las propiedades de los exponentes y porque en cada fila columna o diagonal de $[k, g, r]$ se tienen $2k + 1$ términos; su producto es

$$g^{2k+1} r^{tr([k,0,1])} = g^{2k+1} r^{4k^3+6k^2+2k}. \square$$

CAPÍTULO 3.

MARCO METODOLÓGICO

El marco metodológico de esta investigación, se sustenta en el modelo de enseñanza y aprendizaje basado en la resolución de problemas, que se caracteriza brevemente. Luego, se describe la forma con la que se alcanzó cada uno de los objetivos específicos planteados para el diseño de la propuesta didáctica.

Distintas investigaciones (Polya (1989), Mason, Burton & Stacey (1982), Puig (1996), entre otros) confirman y sustentan las ventajas de la metodología del modelo de resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas. Entre otras razones, De la Rosa (2007), enfatiza que: la resolución de problemas hace mayor énfasis en el desarrollo del aprendizaje que en la memorización, es aplicable a estudiantes de distintas edades, permite el aprendizaje y refuerzo de conceptos, estimula el aprendizaje basado en el descubrimiento, permite integrar conceptos, procesos y habilidades en una misma tarea, y además el conocimiento que se desarrolla, también es aplicable en la solución de situaciones en la vida cotidiana.

3.1. Ejecución de los objetivos

Para alcanzar los objetivos específicos planteados, este trabajo de investigación, se desarrolló como se describe a continuación:

Objetivo 1. Examinar propuestas didácticas para la educación básica y media, relacionadas con los patrones y la generalización.

Para lograr este objetivo, se hizo una revisión de algunas investigaciones que aplicaban propuestas didácticas donde se abordan procesos de generalización, con el fin de seleccionar o ajustar preguntas, problemas o situaciones pertinentes para la población con que se realizó el estudio. En tales investigaciones, se identificaron la metodología y el tipo de análisis utilizado en el reconocimiento de las regularidades. Lo anterior fue una guía importante para el diseño de la propuesta. El logro de este objetivo se hace evidente en el planteamiento y análisis de las preguntas, problemas, situaciones e intervenciones en el aula, que se realizaron en el espacio llamado taller de cuadrados mágicos, ofrecido para estudiantes de ciclo cuatro del Instituto Pedagógico Nacional, durante el tercer trimestre del año escolar 2015. Todo esto se presenta en los capítulos 4 y 5 de este documento.

Objetivo 2. Aplicar una prueba diagnóstica a los estudiantes del ciclo cuatro que participarán en el proyecto, para determinar su nivel de habilidad en el reconocimiento y generalización de patrones.

Para el diseño de la prueba diagnóstica se hizo una adecuación, de las tareas propuestas por Vergel (2014, p. 93) en su tesis de doctorado. Ya que dichas tareas son un instrumento implementado, que da cuenta de una exploración sobre los procesos de generalización de los estudiantes. El análisis de la prueba diagnóstica se basó en las etapas descritas por el grupo de Mason (1985), sobre la expresión de la generalidad. Este análisis permitió establecer, de forma general, el nivel de habilidad en el reconocimiento y generalización de patrones de los estudiantes con los que realizó el estudio. El logro de este objetivo se evidencia en los resultados (capítulo 4), en donde se presentan la prueba y su análisis, y en la propuesta didáctica (capítulo 5) que muestra los ajustes realizados para su futura implementación.

Objetivo 3. Seleccionar en los cuadrados mágicos patrones y regularidades, que puedan potenciar procesos de generalización y comprensión de propiedades algebraicas básicas, pertinentes al ciclo cuatro.

En el capítulo 3 de esta investigación, se presenta el desarrollo teórico de los cuadrados mágicos. En su construcción se pudo establecer, el conjunto de propiedades que dan cuenta de los patrones y regularidades, que pueden potenciar los procesos de generalización y la comprensión de las propiedades algebraicas básicas por parte de los estudiantes.

Objetivo 4. Estructurar la secuencia de actividades, a través de la transposición didáctica.

En el marco de la resolución de problemas se diseñó una secuencia de actividades, a través de la transposición didáctica de los conocimientos adquiridos durante la consecución de los objetivos anteriores. Tales actividades se desarrollaron durante el taller de cuadrados mágicos con estudiantes de ciclo cuatro, del Instituto Pedagógico Nacional. Cada una de las actividades fue analizada de forma cualitativa (esto se presenta en el capítulo 4). Con los resultados de este análisis se diseñó la propuesta didáctica (capítulo 5) compuesta por siete actividades para implementar en el aula. Estas constituyen la parte fundamental de este trabajo de investigación, y abordan una serie de problemas en el contexto de los cuadrados mágicos, cuya complejidad va aumentando gradualmente, pretendiendo desarrollar el pensamiento algebraico.

3.2. Fases metodológicas

El diseño de la propuesta didáctica, se realizó de acuerdo a las tres fases que se describen a continuación:

3.2.1. Fase 1. Diseño de instrumentos:

De acuerdo a los objetivos propuestos en la presente investigación, se diseñaron la prueba diagnóstica y cuatro actividades (capítulo 4), para abordar los procesos de generalización a partir de los cuadrados mágicos. El diseño de tales actividades, se basó en la teoría sobre los cuadrados mágicos descrita en el capítulo 3, así como en el tipo de preguntas presentadas en los antecedentes.

3.2.2. Fase 2. Pilotaje de las actividades:

En la fase de pilotaje, se implementaron y adecuaron como instrumentos, las guías correspondientes a las actividades diseñadas en la primera fase. Esta implementación se llevo a cabo en el espacio académico denominado *taller de cuadrados mágicos*, que se ofrece en el *Instituto Pedagógico Nacional*, con catorce estudiantes de los grados octavo y noveno.

Este espacio académico busca aproximar a los estudiantes al quehacer matemático, para explorar el énfasis de matemáticas que el colegio brinda. Vale la pena aclarar que en dicha institución se ofrecen cuatro énfasis; sociales, matemáticas, ciencias naturales y artes, los cuales son elegidos por los estudiantes al finalizar la educación básica. Así pues la rotación por los talleres es un medio, para que los estudiantes realicen un sondeo previo a su elección. Por ende la población con la que se realizó el estudio no necesariamente tiene un gusto o afinidad en particular por las matemáticas. Básicamente, es tan heterogénea como cualquier aula regular.

Luego de la recolección de la información a través de las actividades mencionadas, se realizó el análisis de la pertinencia de las preguntas y de la expresión de la generalidad, teniendo en cuenta las *etapas* que establece Mason *et al* (1985), los estratos que enuncia Radford (2006) y los registros de video de las sesiones de clase correspondientes a la implementación.

Así pues en el capítulo 4 del documento, se presentan los análisis y en ellos, la transcripción de algunos fragmentos de video de las clases. A continuación se presentan los convenios utilizados en tales transcripciones (esto también se muestra en el apéndice A, para que su búsqueda sea más sencilla, en caso de requerirlo en la lectura del capítulo concerniente a los resultados):

Convenios sobre la transcripción de los videos

- Cada línea de diálogo está conformada, por su número, el o los hablantes y el discurso.
- Los corchetes “[ ]” son utilizados, para indicar comentarios sobre el discurso, luego el texto que este dentro de ellos, no hace parte del mismo.
- El símbolo “(…)” se usa para representar la existencia de elementos del discurso o situaciones que no fueron transcritas.
- Los dos puntos que siguen a una palabra representan la extensión sonora de la misma.
- El paréntesis “( )” encierra una transcripción que no es segura o precisa, corresponde a la suposición más probable.
- El uso de la letra cursiva en una palabra, representa el momento en que el hablante de la línea siguiente hace una interrupción.

3.2.3. Fase 3. Diseño de la propuesta:

Con los resultados obtenidos en el análisis de la pertinencia de las preguntas y de la expresión de la generalidad, se establecen las actividades que constituyen la propuesta didáctica, la cual es descrita en el capítulo 5 del trabajo.

CAPÍTULO 4.

RESULTADOS

A continuación se presenta el análisis de las actividades implementadas correspondientes a la primera versión de la propuesta didáctica (ver APÉNDICE B).

4.1. Prueba diagnóstica

La prueba diagnóstica que se analiza a continuación, fue desarrollada por catorce estudiantes en el espacio curricular que recibe el nombre de *taller de cuadrados mágicos*. La prueba corresponde a una adaptación de las tareas propuestas por Vergel (2014, p. 93), y su análisis se basa en las etapas: "*ver un patrón, decir cuál es el patrón, registrar un patrón y, prueba de la validez de las formulas*" que describen Mason, et al (1985), sobre la expresión de la generalidad.

El análisis que se presenta a continuación, da cuenta de cada una de las preguntas propuestas en la prueba. En este, se describen en forma general las respuestas dadas por los estudiantes, las etapas relacionadas con la expresión de la generalidad y algunas evidencias de los resultados analizados.

La prueba diagnóstica consta de seis preguntas basadas en la secuencia que se presenta a continuación (Figura 9), esta corresponde a una representación gráfica de la sucesión aritmética cuyo i-ésimo elemento tiene la forma $b_i = 4 + 3(i - 1)$, siendo i el número de la figura.

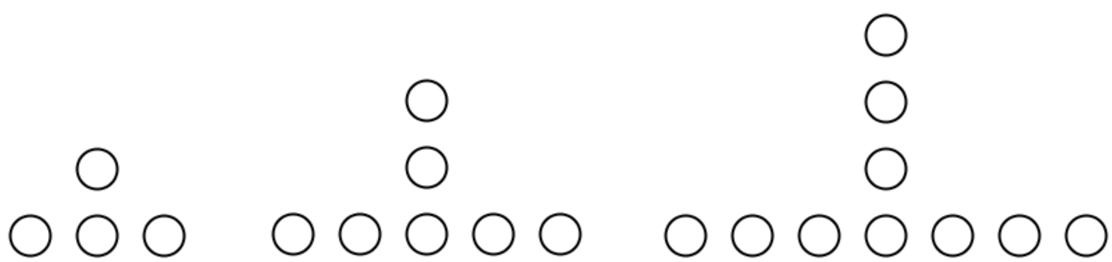


figura 1. figura 2. figura 3.

Figura 9. Secuencia gráfica en la que se basa la prueba. Adaptado de Vergel (2014)

Teniendo en cuenta cada una de las etapas, mencionadas inicialmente, en la aplicación de la prueba se determinó que:

Resultado pregunta 1.

Pregunta 1. Dibuja las figuras 4 y 5.

Etapa: *Ver un patrón.*

Se esperaba que los estudiantes determinaran las diferencias y similitudes entre una figura y otra, es decir que reconocieran el patrón de recurrencia propio de la sucesión aritmética presentada. Los 14 estudiantes de este grupo reconocen la regularidad. En la Figura 10, se muestra el planteamiento de uno de ellos.

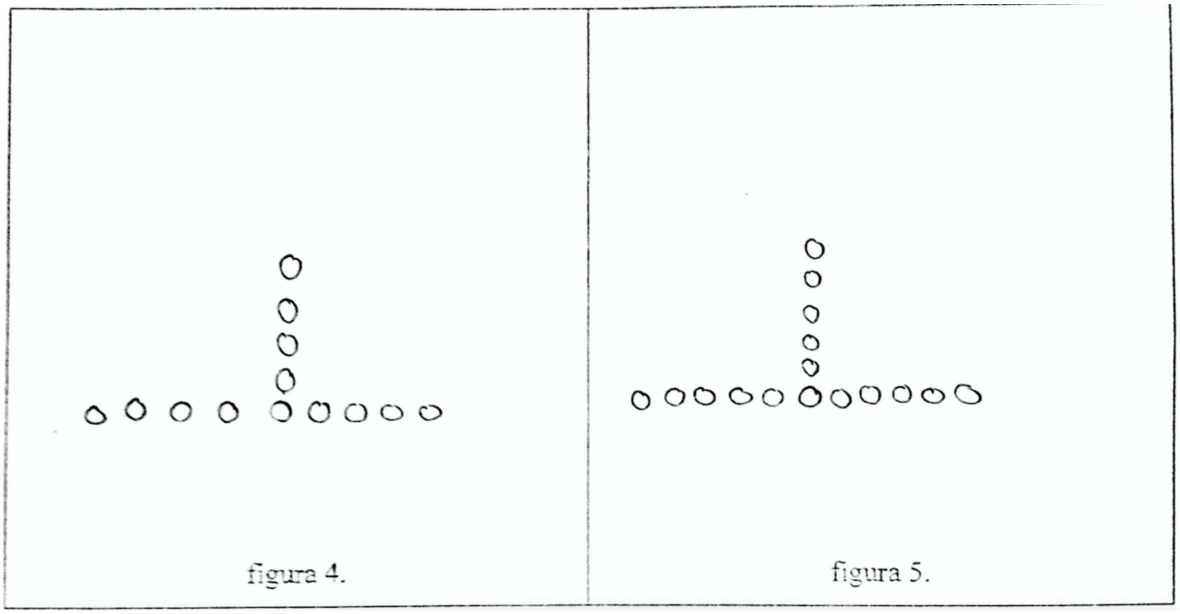


Figura 10. Figuras 4 y 5 de la secuencia, dadas por una estudiante.

Conclusión: de acuerdo al análisis de la pregunta se establece entonces que, la totalidad de los estudiantes reconoce el patrón de la secuencia, lo cual indica que "ven" el patrón, en este contexto particular, y están en capacidad de continuar la secuencia.

Resultado pregunta 2.

Pregunta 2.	Calcula el número de círculos de la figura 10 explicando cómo lo haces. Evita hacer el dibujo de la figura.
Etapas:	*Decir cuál es el patrón, registrar el patrón y probar la validez de las fórmulas.*

Las respuestas de los estudiantes a esta pregunta pueden clasificarse en tres tipos:

Reconocimiento de la relación entre el número de la figura y la cantidad de círculos: Las respuestas de once estudiantes de la muestra, se clasifican en este tipo. Los estudiantes establecen una regla para determinar la cantidad de círculos de una figura, si se conoce el número de la misma. La gráfica de la sucesión aritmética, posibilitó que determinaran más fácilmente la relación entre el número de la figura y la cantidad de círculos.

A continuación se presentan dos respuestas (Figura 11 y Figura 12), que ponen en evidencia el aporte significativo, que hace la representación gráfica sobre el reconocimiento del patrón.

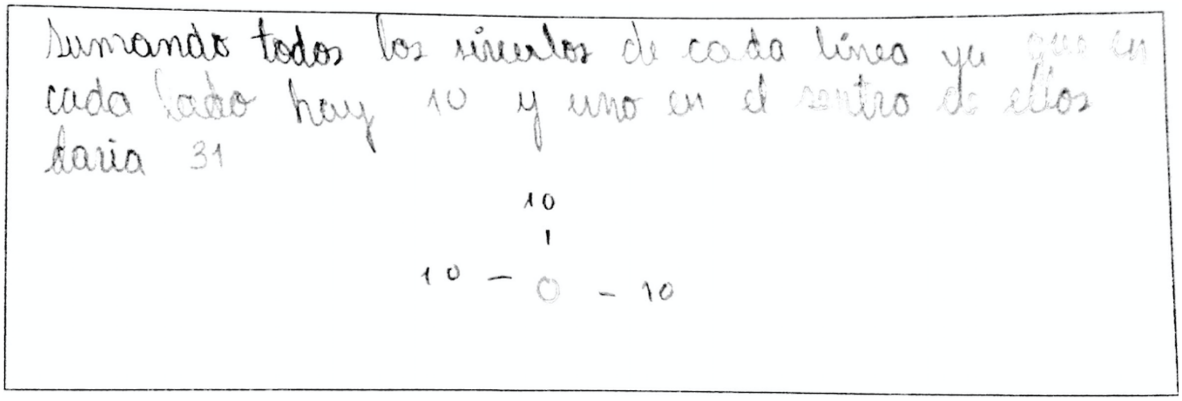


Figura 11. Explicación de un estudiante basada en la estructura de las figuras de la secuencia.

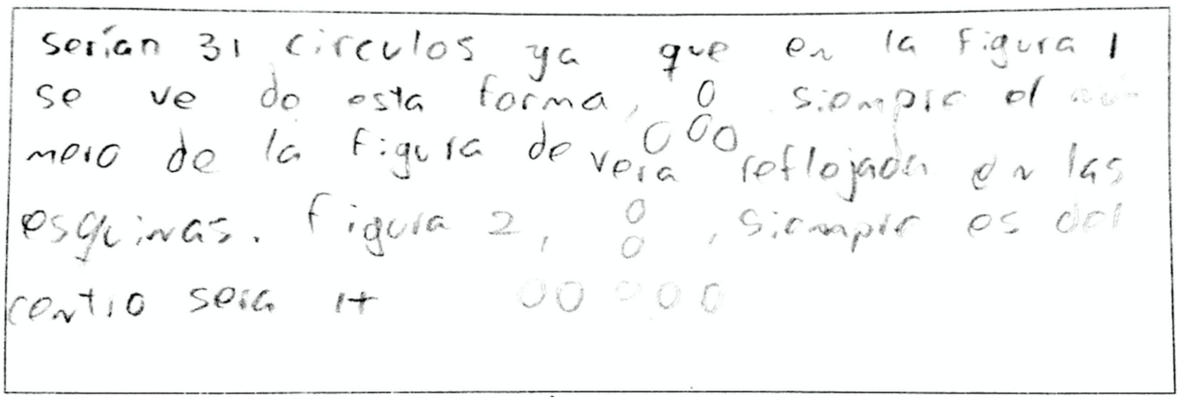


Figura 12. Explicación de un estudiante que establece una relación entre el número de la figura y la cantidad de círculos que hay alrededor de un circulo que él llama "centro".

Los estudiantes que dan cuenta de las Figura 11 y Figura 12, establecen que el número de la figura es el mismo que la cantidad de círculos a los lados y parte superior de otro círculo "central". Uno de ellos establece que la cantidad de círculos se halla a través de la suma $10 + 10 + 10 + 1$.

Adicionalmente algunos estudiantes, determinan la relación entre el número de la figura y la cantidad de círculos, estableciendo que la regla para calcular el número de círculos de la figura es, multiplicar el número de la figura por tres y luego adicionar uno. La mayoría expresa esto sin utilizar símbolos (únicamente el lenguaje ordinario). En este grupo se encuentra que sólo uno de los estudiantes, utilizó una aproximación a la representación simbólica de la relación (Figura 13). Este estudiante plantea una relación válida, pero usa los paréntesis para separar los números de la palabra figura, más no, en el sentido de la ley distributiva del producto respecto a la suma, lo cual es evidente en el cálculo que realiza.

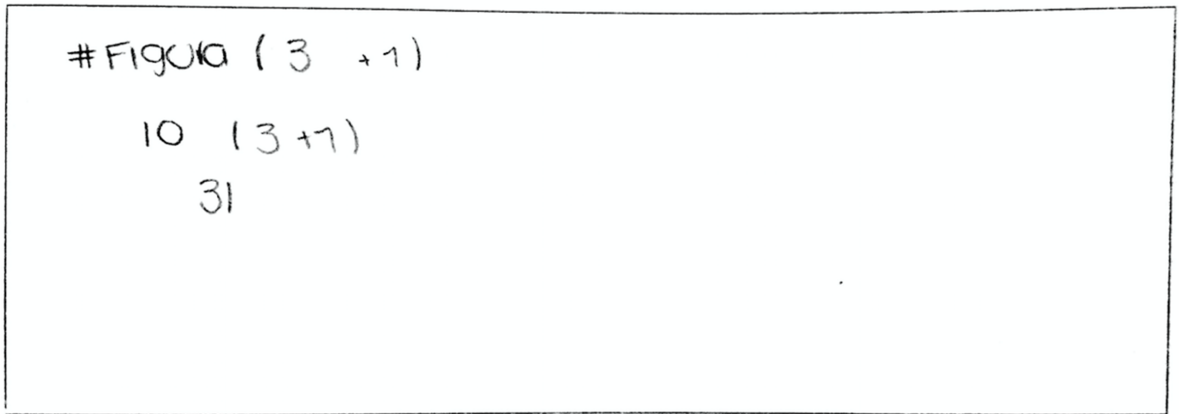


Figura 13. Representación simbólica de la relación entre el número de la figura y la cantidad de círculos que la componen.

Reconocimiento de la relación entre una figura y la siguiente: Dos estudiantes de la muestra resuelven la pregunta al hacer sumas sucesivas de tres, indicando en ello, que reconocen el cambio que hay de una figura a la que le sigue, lo cual corresponde a un algoritmo con el que puede encontrar la respuesta correcta, aunque de forma poco eficiente. Uno de los estudiantes utiliza el lenguaje ordinario, enunciando "*el número de círculos de la 10 es 31, puesto que sólo se sumaban de a tres en cada figura*". El otro da una explicación simbólica de la situación (Figura 14).

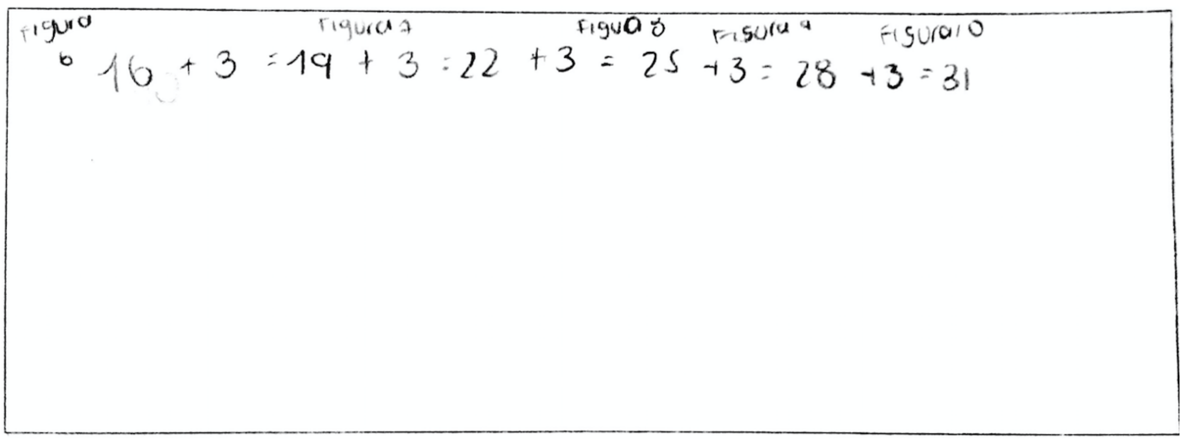


Figura 14. Explicación con casos particulares sobre la relación entre el número de la figura y la cantidad de círculos que la componen.

Obstáculo epistemológico derivado de una interpretación incorrecta del enunciado: Un estudiante indica que para determinar la cantidad de círculos de la figura 10, basta con multiplicar la cantidad de círculos de la figura 5 por dos. Esto supone un error derivado de acostumbrarse a un método para resolver problemas aritméticos sin tener en cuenta el enunciado (Figura 15).

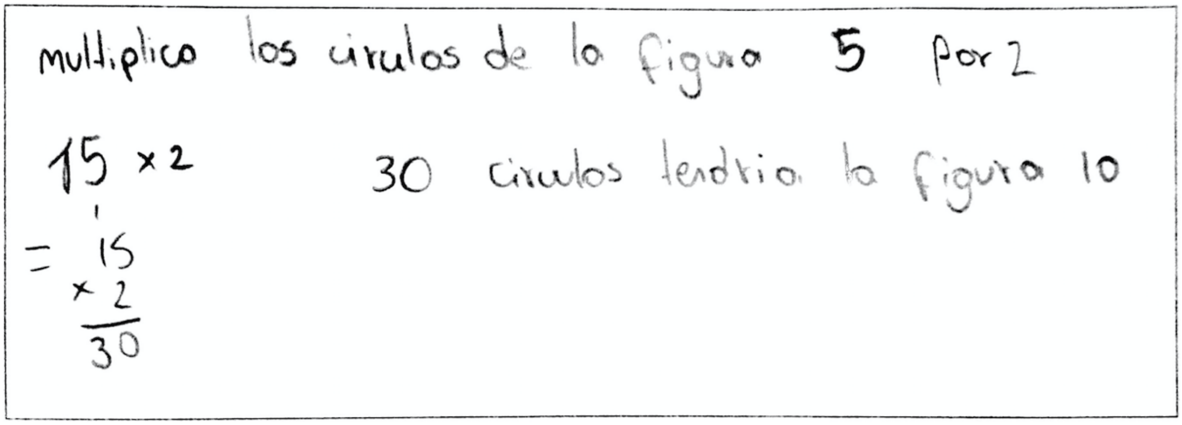


Figura 15. Procedimiento dado por un estudiante, en el que no se tiene en cuenta el contexto de la pregunta.

Conclusión: De acuerdo al análisis de la pregunta, se establece que el 93% de la muestra reconoce el patrón propio de la secuencia, además lo "dice" y "registra", también "verifica la validez de la formula". El 7 % posiblemente no entiende cómo utilizar el patrón de la secuencia, para identificar una expresión que les permita resolver el problema. Adicionalmente, no "verifica" la validez de la fórmula que propone para resolver el problema.

Resultado pregunta 3.

Pregunta 3. Calcula el número de círculos de la figura 99 y explica como lo haces.

Etapas: *Decir cuál es el patrón, registrar el patrón y probar la validez de las fórmulas.*

Además de identificar si los estudiantes dicen y registran el patrón, y verifican sus fórmulas para resolver problemas. Se propone la tercera pregunta con el fin de depurar y poner en evidencia los algoritmos poco eficientes (como el presentado en la clasificación de *reconocimiento de la relación entre una figura y la siguiente*, estipulado en la situación previamente descrita).

La totalidad de estudiantes establece que, para determinar el número de círculos de la figura 99, se procede multiplicando noventa y nueve por tres, más uno. Un ejemplo de ello se presenta en la Figura 16. Sin embargo, cuatro estudiantes no llegan al resultado correcto, por cometer errores aritméticos. En la explicación que ofrecen los estudiantes, se encuentra que sólo cinco de ellos, usan el lenguaje ordinario para describir el procedimiento utilizado. El resto sólo presenta la operación aritmética de dicho procedimiento.

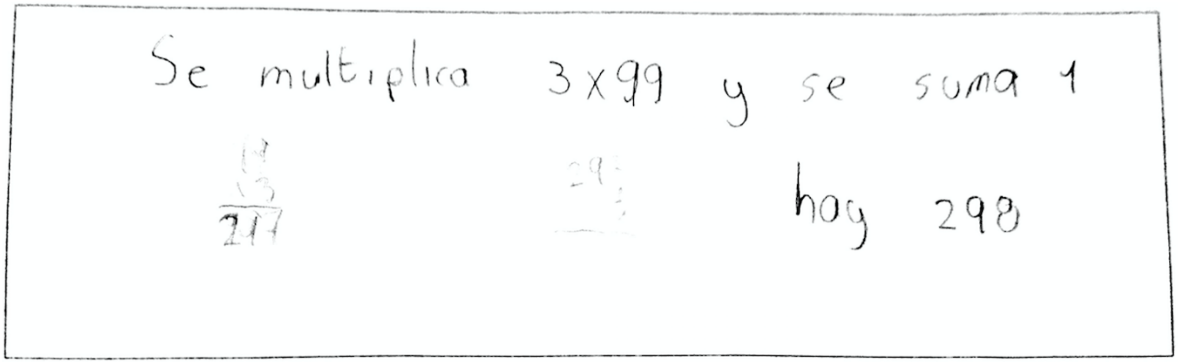


Figura 16. Explicación del método para determinar el número de círculos de la figura 99, dada por un estudiante.

Conclusión: la totalidad de estudiantes reconocen y establecen una fórmula para encontrar la cantidad de círculos de una figura conociendo el número de la misma. Ello indica que todos los estudiantes ven, dicen y registran el patrón. Además, permite suponer que la totalidad de estudiantes de este grupo, verifica la validez de la fórmula empleada, aun cometiendo errores aritméticos en el cálculo de la cantidad de círculos de la figura 99. Se concluye además que la totalidad de los estudiantes encontró de forma implícita que el i-ésimo término de la sucesión tiene la forma $b_i = 3i + 1$, siendo i el número de la figura. Esto es equivalente a encontrar la forma $b_i = 4 + 3(i - 1)$, para el el i-ésimo término de la sucesión. Lo cual indica el logro de los objetivos de las primeras preguntas de la prueba.

Resultado pregunta 4.

Pregunta 4. Juan hizo la gráfica de una figura perteneciente a esta secuencia. Él dibujó exactamente 61 círculos. ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta.

Etapas: *Decir cuál es el patrón, registrar el patrón y probar la validez de las fórmulas.*

La pregunta 4 se formula con el fin de establecer si los estudiantes tienen la capacidad de realizar un proceso de reversibilidad respecto a la relación entre las variables involucradas en la situación. Tal interpretación requiere establecer la relación inversa entre el número de la figura y la cantidad de círculos que la componen.

La totalidad de la muestra determinó que la figura 20 responde a la pregunta. Diez de estos estudiantes, presentan en sus justificaciones un procedimiento para determinar dicho resultado. Tales procedimientos pueden clasificarse de acuerdo a su estructura, en multiplicativos y aditivos. Estos se describen a continuación:

Procedimientos de estructura multiplicativa: Siete estudiantes exponen que para determinar el número de la figura, debe restarse uno de los sesenta y uno, que se presentan en el enunciado del problema, y posteriormente dividir por tres, obteniendo que es la figura 20 (Figura 17). Además otro estudiante, manifiesta que el número de la figura es veinte, puesto que veinte por tres más uno, da como resultado sesenta y uno (Figura 18).

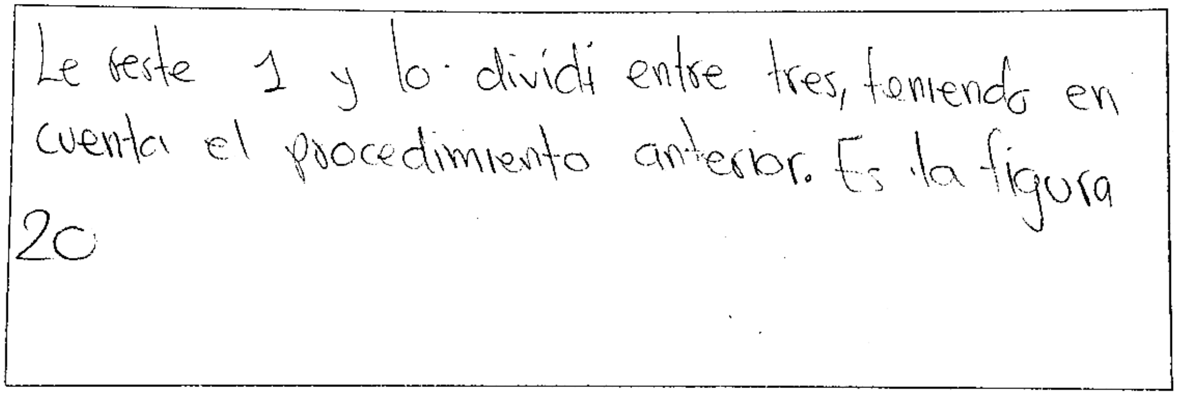


Figura 17. Procedimiento dado por un estudiante que involucra resta y división.

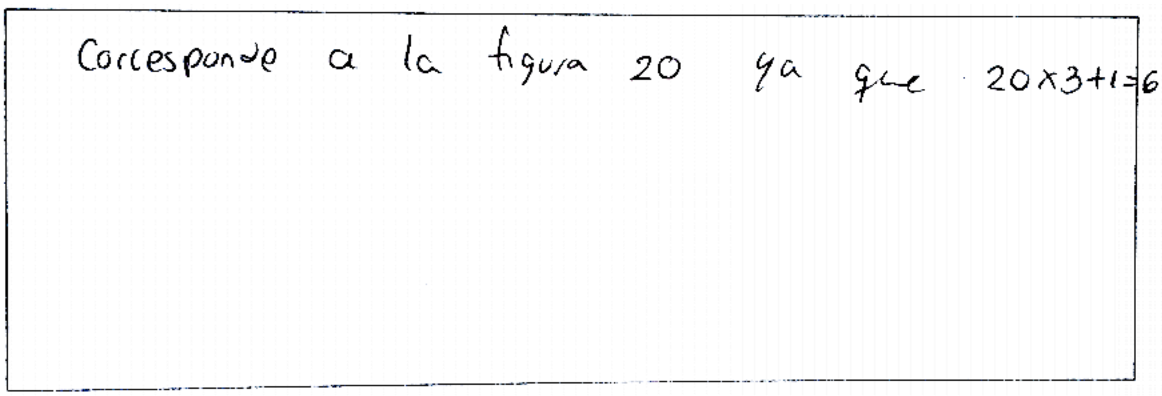


Figura 18. Procedimiento dado por un estudiante que involucra suma y multiplicación.

Aunque las operaciones presentadas en las Figura 17 y Figura 18, son equivalentes, provienen de razonamientos distintos, puesto que en el primero de ellos se establece un mecanismo para encontrar de forma directa, el número de la figura que responde a la situación. Mientras que, el segundo procedimiento involucra la búsqueda de un número (probablemente por ensayo y error) que cumpla con la condición, de que al multiplicarse por tres y a esto agregarle uno, de cómo resultado sesenta y uno.

Procedimientos de estructura aditiva: Dos estudiantes justifican que la figura 20 está formada por sesenta y un círculos exactamente. Esto a través de una suma (Figura 19) que representa los tres grupos de veinte círculos, que se generan a los lados y en la parte superior de un círculo nombrado por ellos como "*central*" ver (Figura 11 y Figura 12). Probablemente, esta justificación presenta de forma más transparente, la influencia de la representación gráfica, en la resolución del problema planteado.

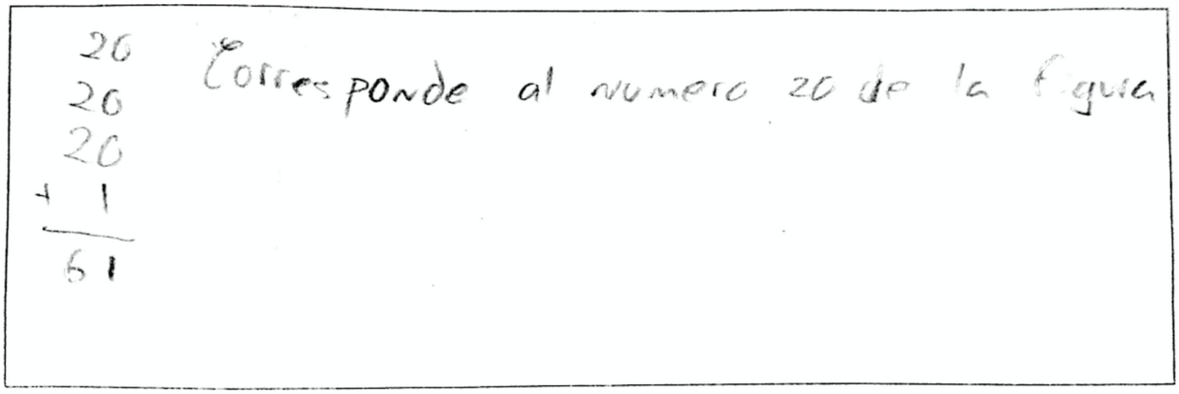


Figura 19. Procedimiento de estructura aditiva presentado por un estudiante.

Los cuatro estudiantes restantes del grupo con el que se realizó la investigación llegaron a la conclusión de que la figura 20, es la solución al problema planteado. Sin embargo, no justificaron el por qué de tal hecho.

Conclusión: la totalidad de los estudiantes reconoce la relación inversa, entre el número de la figura y la cantidad de círculos que la componen. Lo cual reafirma que ven, dicen y registran el patrón de recurrencia, propio de la secuencia presentada y en términos generales verifican la validez de las fórmulas que determinan, para solucionar el problema planteado.

Resultado pregunta 5.

Pregunta 5. ¿Existe alguna figura de la secuencia que tenga 200 círculos? Explica tu respuesta.

Etapas: *Decir cuál es el patrón, registrar el patrón y probar la validez de las fórmulas.*

Se formula la quinta pregunta con el objetivo de, establecer si los estudiantes reconocen características de los números que pertenecen a la sucesión estudiada en la prueba diagnóstica.

Trece de los estudiantes respondieron en forma correcta a la pregunta formulada. Sus resultados son clasificados de la siguiente forma:

Resultado con procedimientos de estructura multiplicativa: Seis respuestas dadas por los estudiantes indican que al restar uno de doscientos, y dividir esto por tres, resulta una división no entera, "inexacta" o "imposible" en el conjunto de los naturales. Esto supone que los estudiantes reconocen que la cantidad de círculos de una figura es un número entero. A continuación se presenta la Figura 20, que corresponde a un ejemplo de la respuesta dada por un estudiante.

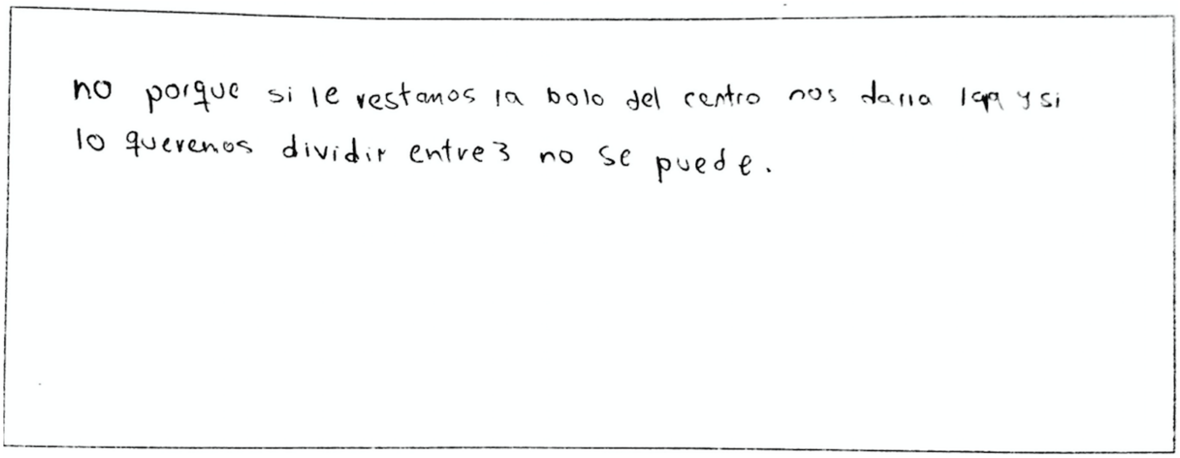


Figura 20. Justificación correspondiente a la imposibilidad realizar la división de ciento noventa y nueve entre tres, en el conjunto de los naturales.

Resultado con procedimientos de estructura aditiva: Dos estudiantes justifican la no existencia de la figura a través de procedimientos que involucran una adición. Los dos estudiantes muestran que la figura 66 genera una gráfica con ciento noventa y nueve círculos. Uno de ellos afirma que, la cantidad de círculos de la figura 66 es la más próxima a los doscientos círculos, a los que se refiere el enunciado del problema (Figura 21). El otro representa gráficamente la forma que tendría la figura, señalando los sesenta y seis círculos que esta tendría a los lados, y los sesenta y siete círculos hacia arriba, contando el círculo "central" (Figura 22). A continuación se muestran las dos respuestas dadas por los estudiantes:

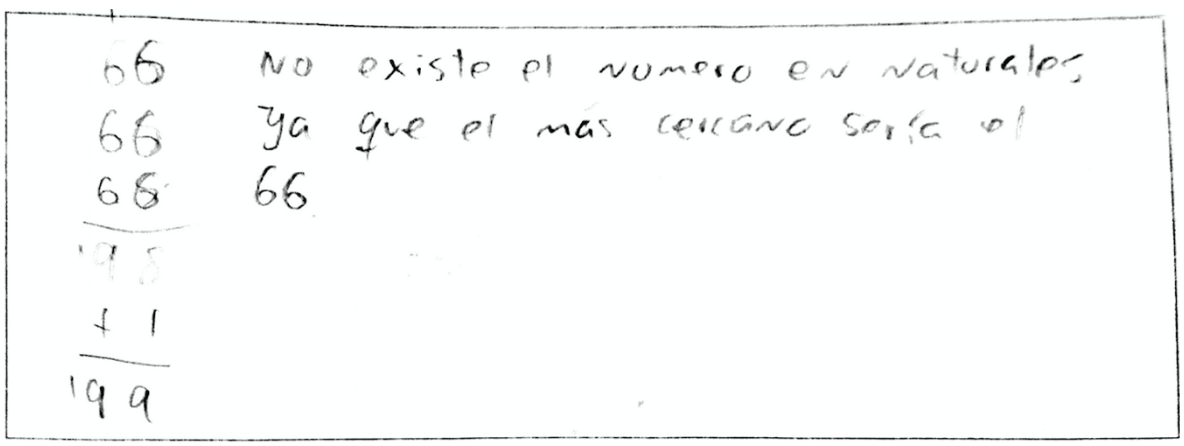


Figura 21. Respuesta que expone por medio de una suma, que existe una figura de la secuencia compuesta por ciento noventa y nueve círculos.

La respuesta presentada en la Figura 21, supone una búsqueda por ensayo y error del número sesenta y seis, que genera una figura con ciento noventa y nueve círculos. Aunque el estudiante, no lo especifique en su respuesta, es consiente (por el reconocimiento del patrón de recurrencia) de que la figura 67, tendría tres círculos más que la figura 66, y por ende concluya la no existencia de una figura, de esta secuencia, compuesta por doscientos círculos.

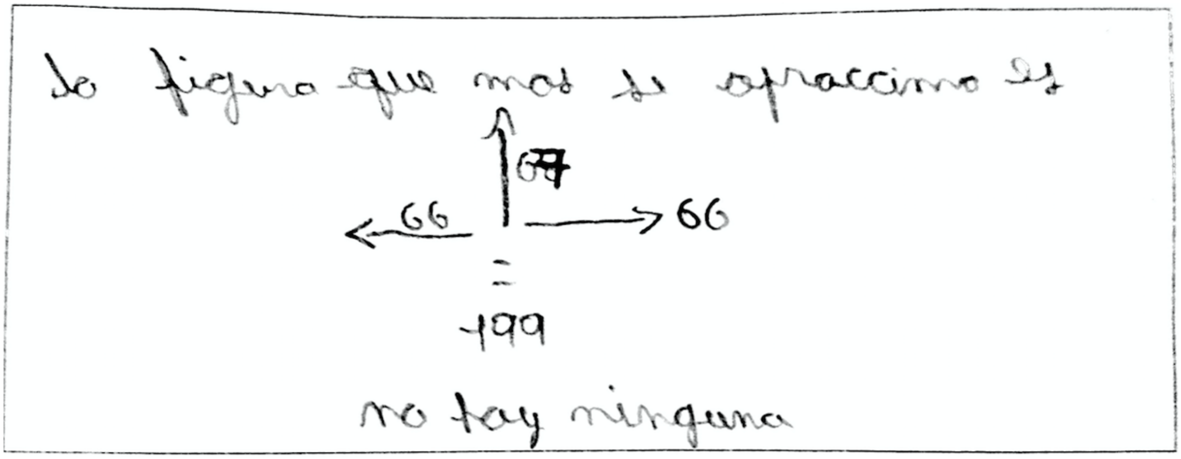


Figura 22. Estructura de la figura 66, compuesta por ciento noventa y nueve círculos.

En la Figura 22, se pone también en evidencia el aporte de la representación gráfica. Además, la conclusión de que no hay ninguna figura compuesta por doscientos círculos, permite suponer el reconocimiento del patrón de recurrencia por parte del estudiante.

Resultado con razonamientos derivados de un resultado conocido: Un estudiante toma el resultado obtenido en el tercer punto de la prueba diagnóstica. Este indica que la figura 99 se compone de 298 círculos. Él reconoce que la diferencia entre cada una de las figuras es de tres círculos, y que si quita grupos de tres y llega a doscientos, entonces existiría una figura en la secuencia compuesta por 200 círculos (Figura 23). En el proceso que no es explícito, probablemente comete errores aritméticos y afirma que existe una figura formada por exactamente 201 círculos, lo cual es falso.

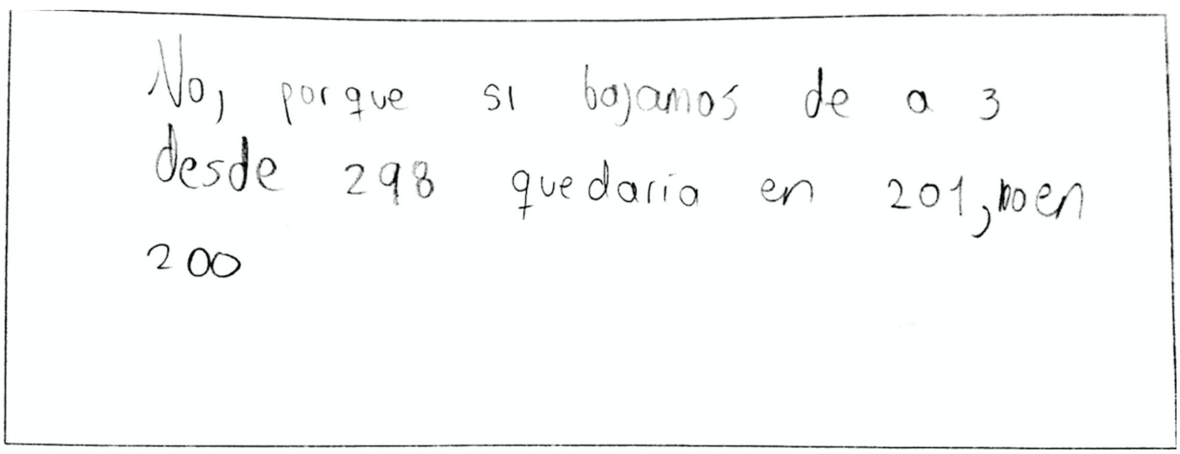


Figura 23. Respuesta derivada de un resultado conocido.

De la Figura 23, puede deducirse un razonamiento coherente. Puesto que si existiera en la secuencia una figura con doscientos círculos y conociendo que la diferencia entre figuras consecutivas es de tres círculos (patrón de recurrencia), puede concluirse que no existe una figura con exactamente doscientos círculos perteneciente a la sucesión.

Resultado usando casos particulares: Dos estudiantes exponen en sus argumentos que conocen la relación entre el número de la figura y la cantidad de círculos que la componen, pero, en la búsqueda de la figura que tiene exactamente doscientos círculos eligen números de forma aleatoria, que multiplicados por tres y sumado uno, den como resultado doscientos o un valor cercano (Figura 24). Aunque el razonamiento puede funcionar, los estudiantes no tienen en cuenta que deben probar con más valores hasta elegir figuras que arrojen los valores más próximos a doscientos.

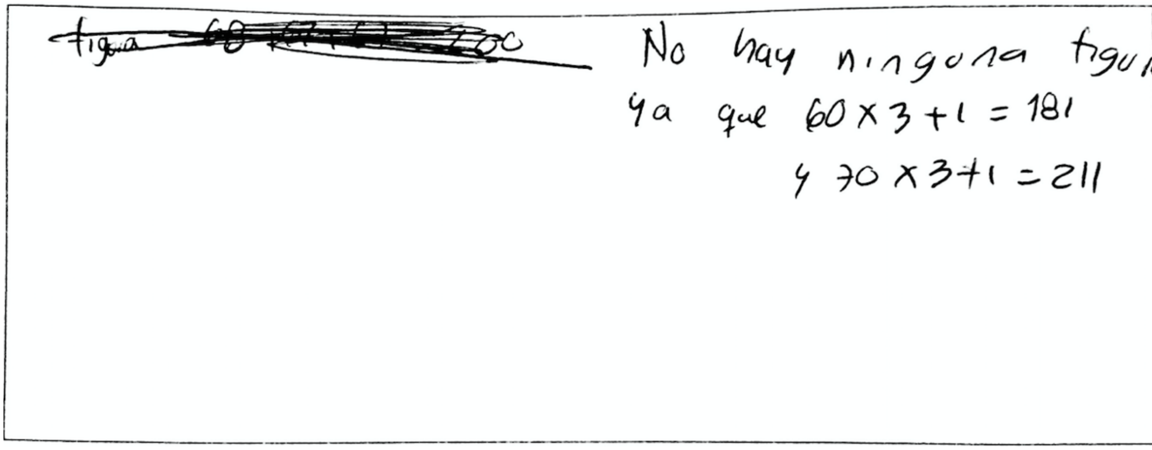


Figura 24. Procedimiento de estructura multiplicativa que supone una búsqueda por ensayo y error.

Esta respuesta, comprueba la hipótesis de que los estudiantes buscan por ensayo y error el número de una figura, conociendo la cantidad de círculos que la componen, a partir de suponer el número de la figura, multiplicarlo por tres y adicionar uno.

Resultado por suposiciones falsas: Uno de los estudiantes justifica que no existe la figura, conjeturando que la secuencia debe contener figuras con números de círculos de la forma $100n + 1, n \in \mathbb{N}$. Lo cual es falso. La respuesta del estudiante se presenta en la Figura 25. Otro estudiante afirma que, no existe una figura de la secuencia conformada por doscientos círculos, puesto que según enuncia "*no hay una secuencia que los círculos sean parejos*". La palabra parejos utilizada por el estudiante, hace referencia a números pares, lo cual conjeturó probablemente, por la estructura de tres brazos de las gráficas.

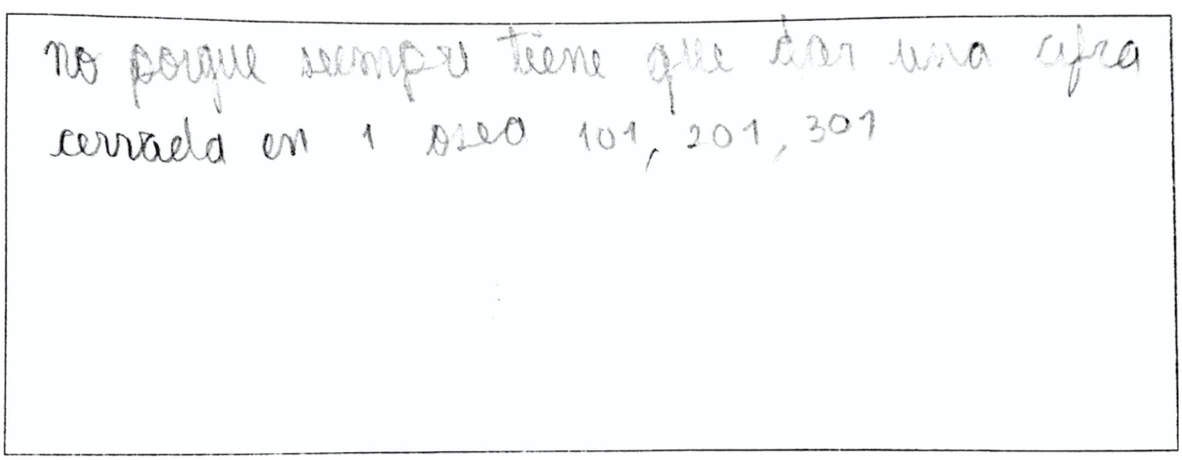


Figura 25. Suposición de cantidad de círculos de la forma $100n + 1, n \in \mathbb{N}$.

Adicionalmente, un estudiante probablemente reconoce el algoritmo que determina el número de círculos que tendría una figura de la secuencia, si se conoce su número. Pero no tiene presente el contexto del problema, ya que abre la posibilidad a la existencia de números de figuras no enteros (Figura 26).

si pero su resultado seria decimal por que es rai.

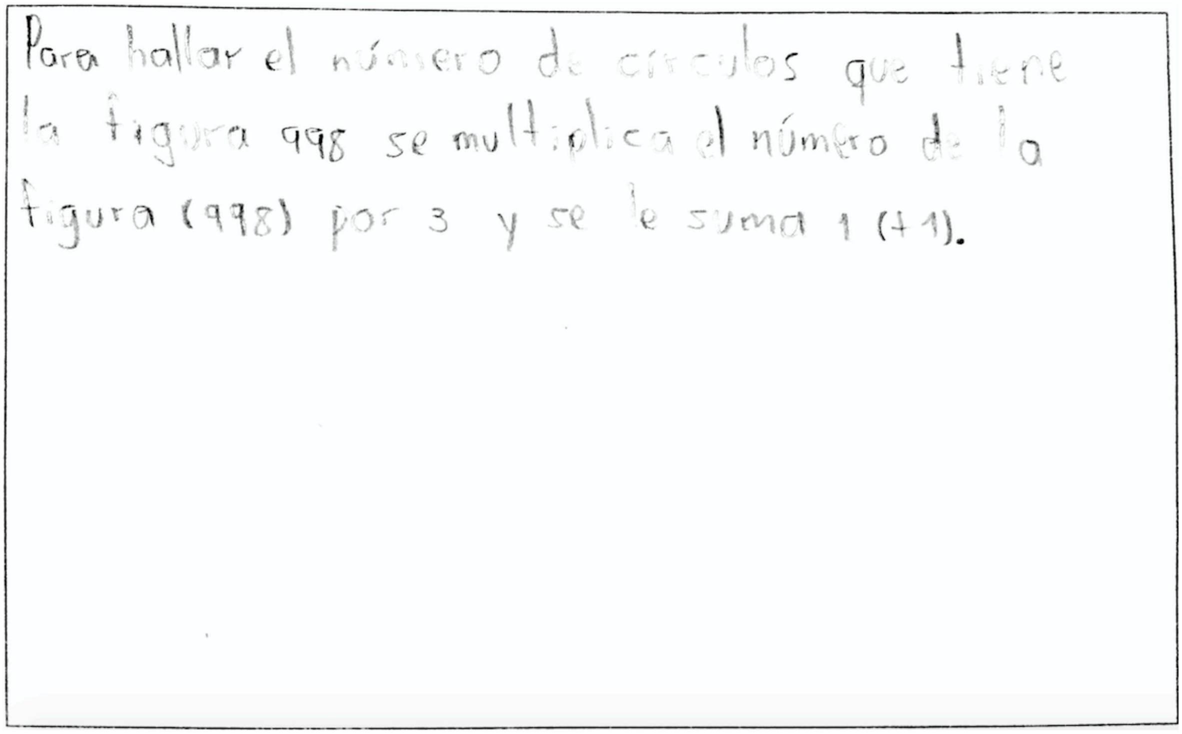
Figura 26. Número de figura decimal.

Conclusión: de acuerdo al análisis se establece que, el 86 % de los estudiantes reconocen la relación inversa entre las variables de la situación planteada. Ven, dicen y registran el patrón de recurrencia, propio de la sucesión presentada y además verifican la validez de las fórmulas que establecen, para solucionar el problema planteado. Por otra parte, el 14 % comete errores por hacer suposiciones falsas, derivadas de la no verificación de fórmulas planteadas. Sin embargo, este último porcentaje de estudiantes ve, dice y registra el patrón.

Resultado pregunta 6.

Pregunta 6.	Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en este explica con claridad y con todo detalle cómo calcular rápidamente el número de círculos que tendría la figura 998 de esta secuencia.
Etapas:	*Decir cuál es el patrón, registrar el patrón y probar la validez de las fórmulas.*

A modo de cierre se formuló la sexta pregunta, en la se esperaba que todos los estudiantes aplicarán el mismo método utilizado para determinar el número de círculos de la figura 99. Sin embargo, al trabajar la relación inversa, previamente, se generó confusión en el grupo, dando como resultado que seis de ellos, describieran el mecanismo de la regla inversa (determinar el número de la figura, conociendo la cantidad de círculos de la misma) para resolver el problema. Los ocho restantes describieron la regla que se esperaba. Sólo uno de ellos utilizó una representación simbólica de la regla (aunque utilizando de forma errónea los paréntesis), los demás expresaron la relación a través del lenguaje ordinario. En Figura 27 se muestra un ejemplo de producción de un estudiante.



Para hallar el número de círculos que tiene la figura 998 se multiplica el número de la figura (998) por 3 y se le suma 1 (+1).

Figura 27. Procedimiento para determinar la cantidad de círculos que tendría la figura 998 de la secuencia.

Conclusión general de la prueba diagnóstica:

Luego del análisis de la prueba diagnóstica, se concluye que todo el grupo de estudiantes que la presentó, tiene un buen nivel respecto a las etapas ver, decir y registrar un patrón. Respecto a la etapa probar la validez de las fórmulas propuestas para dar solución a un problema, se establece que la mayoría de estudiantes comprueban las fórmulas que utilizan en distintos casos. Pero que debe hacerse énfasis en la variedad de patrones y regularidades que son capaces de construir y cómo logran usar comprensivamente, desde allí, los recursos semióticos para expresar la generalidad.

4.2. Pilotaje de actividades

Las actividades que a continuación se analizan, se aplicaron en el espacio curricular que recibe el nombre de *taller de cuadrados mágicos*, que se desarrolló en el Instituto Pedagógico Nacional, los días martes en el horario 1:30 p.m. a 3:00 p.m., a este espacio se inscribieron catorce estudiantes pertenecientes a los grados octavo y noveno (ciclo cuatro).

El análisis de los resultados obtenidos en la aplicación de las actividades, se basa en dos teorías que abordan la expresión de la generalidad; como las etapas: "*ver un patrón, decir cuál es el patrón, registrar un patrón y, prueba de la validez de las formulas*" que describen Mason, et al (1985), y los estratos de generalidad, *factual, contextual* y *simbólica* que establece Radford (2006) en el desarrollo del pensamiento algebraico.

Además el análisis se apoya, en los datos escritos recogidos en las guías desarrolladas por los estudiantes y la transcripción de algunos fragmentos de video, tomados en algunas sesiones del taller. Vale la pena resaltar que las convenciones utilizadas en la transcripción de los videos, se explican de acuerdo a su aparición en la misma.

4.2.1. Actividad 1.

Fecha: 25 de agosto de 2015

Número de estudiantes: 14

Objetivos:

- Reconocer el concepto de cuadrado mágico, a través de la adaptación de un momento importante de su aparición en la historia.
- Relacionar las sucesiones aritméticas con los cuadrados mágicos.
- Establecer algunos patrones relacionados con el método hindú para la construcción de cuadrados mágicos.

Resultado pregunta 1.

Los cuadrados mágicos ya eran conocidos en China muchos siglos antes de nuestra era. Según cuenta la leyenda, el río *Lo* estaba desbordado y, a pesar de las ofrendas que hacían al dios del río, no conseguían que disminuyera su caudal. Por suerte para los habitantes de la región, el emperador *Yu* observó que tras cada ofrenda aparecía una misma tortuga y, curiosamente, en las divisiones de su caparazón, tenía marcas que representan los números consecutivos de 1 a 9. Las marcas estaban dispuestas de tal forma que, la suma de los números en forma horizontal, vertical y diagonal, siempre era 15. Así pues, se hicieron quince ofrendas seguidas (o incluyeron quince objetos en la ofrenda, ¡quién sabe!) y las aguas del río retornaron al cauce habitual. (Adaptado de Trigo 2007 p. 91-92)

Pregunta 1. De acuerdo a la historia ubique los números de 1 a 9, en el caparazón de la tortuga, de tal forma que los números de cada fila, columna y diagonal sumen15.

La primera pregunta que se presenta en la actividad no aborda de forma directa procesos de generalización, puesto que busca acercar a los estudiantes, al reconocimiento del concepto de cuadrado mágico, a partir de un fragmento relacionado su aparición en la historia.

Con el fin de aportar a la descripción de algunas estrategias de los estudiantes para resolver el problema, se presentaron doce cuadrículas cuadradas, compuestas por nueve cuadrados, posibilitando que los estudiantes organicen los números de 1 a 9, sin que tuviesen que borrar.

Trece de los estudiantes encontraron la solución al problema luego de buscar por ensayo y error la organización que daba respuesta a la pregunta. La cantidad de ensayos utilizados por los estudiantes se establece en un rango de tres a doce. En la Figura 28 se muestra un ejemplo de la respuesta dada por uno de los estudiantes.

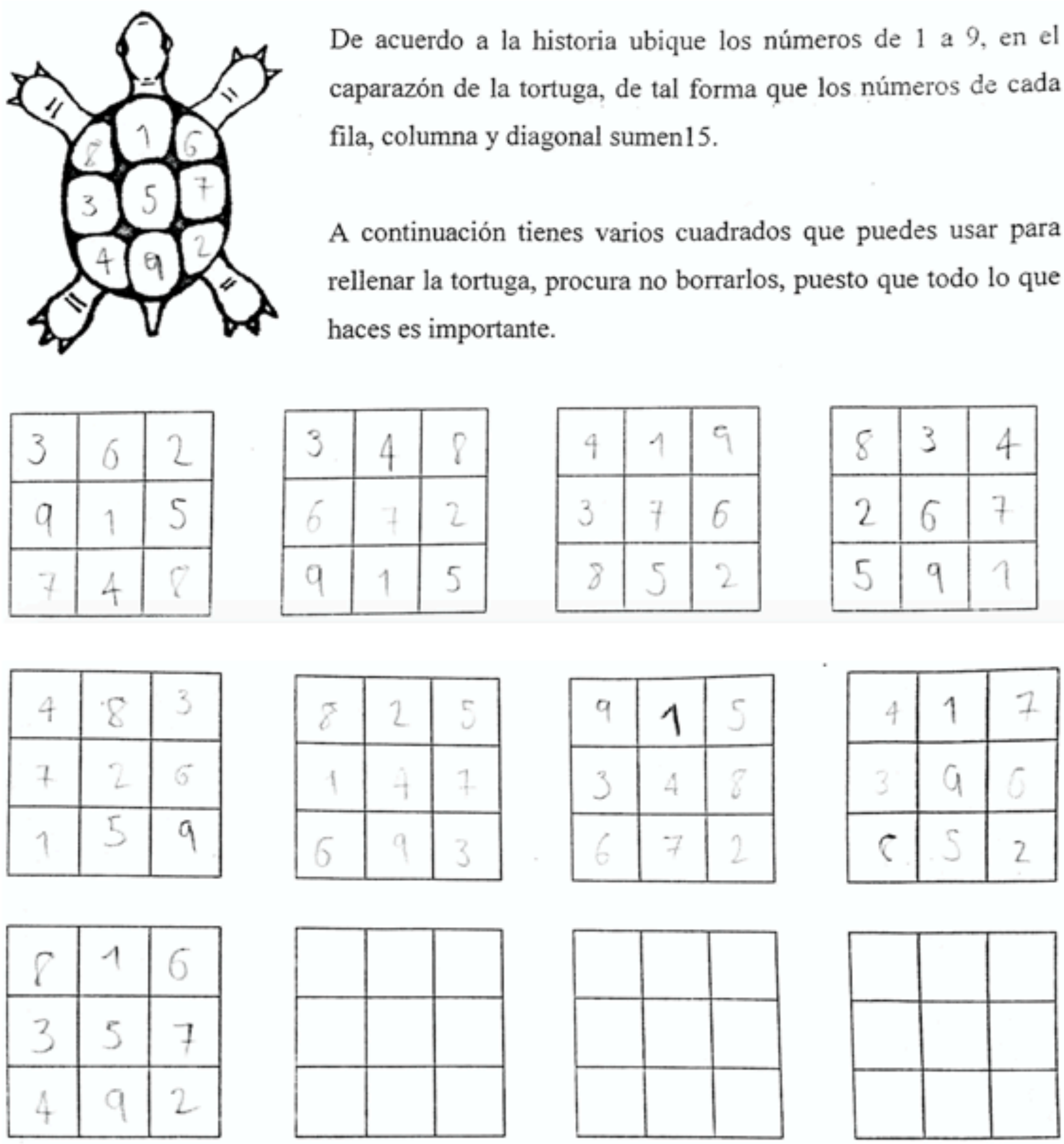


Figura 28. Solución determinada a partir de ensayo y error.

La búsqueda de la respuesta a la pregunta 1, tomó bastante tiempo (aproximadamente 40 minutos), ello implicó que seis de los estudiantes no respondieran a la totalidad de las preguntas planteadas en la guía. Sin embargo, la sesión de clase se cerró con la socialización del trabajo realizado, con el fin de concluir acerca de los hallazgos, estrategias y dificultades, entre otros, encontrados en el desarrollo de la actividad, lo cual de acuerdo a los fundamentos teóricos de esta investigación se considera relevante.

Conclusión: el método inicial utilizado por los estudiantes para resolver el problema es la prueba por ensayo y error. El tiempo que toma a los estudiantes encontrar la solución, es muy variable, algunos toman más de cuarenta minutos.

Resultado pregunta 2.

Pregunta 2. Explica detalladamente las estrategias que seguiste para ubicar los números en la tortuga, sin importar que estas tuvieran o no éxito.

La segunda pregunta tiene como finalidad, la descripción de algunas estrategias aplicadas por los estudiantes, en la resolución del cuadrado mágico de lado tres que se plantea en la situación inicial.

Para el análisis de esta pregunta, se hace necesario establecer una representación de la posición en la que se ubican los números en la cuadrícula. Entonces, se estipula que tal posición, será designada con una pareja de números (i, j) correspondientes respectivamente, al número de la fila y columna asociado a la cuadrícula (análogo a la posición de un término en una matriz), como se muestra en Figura 29.

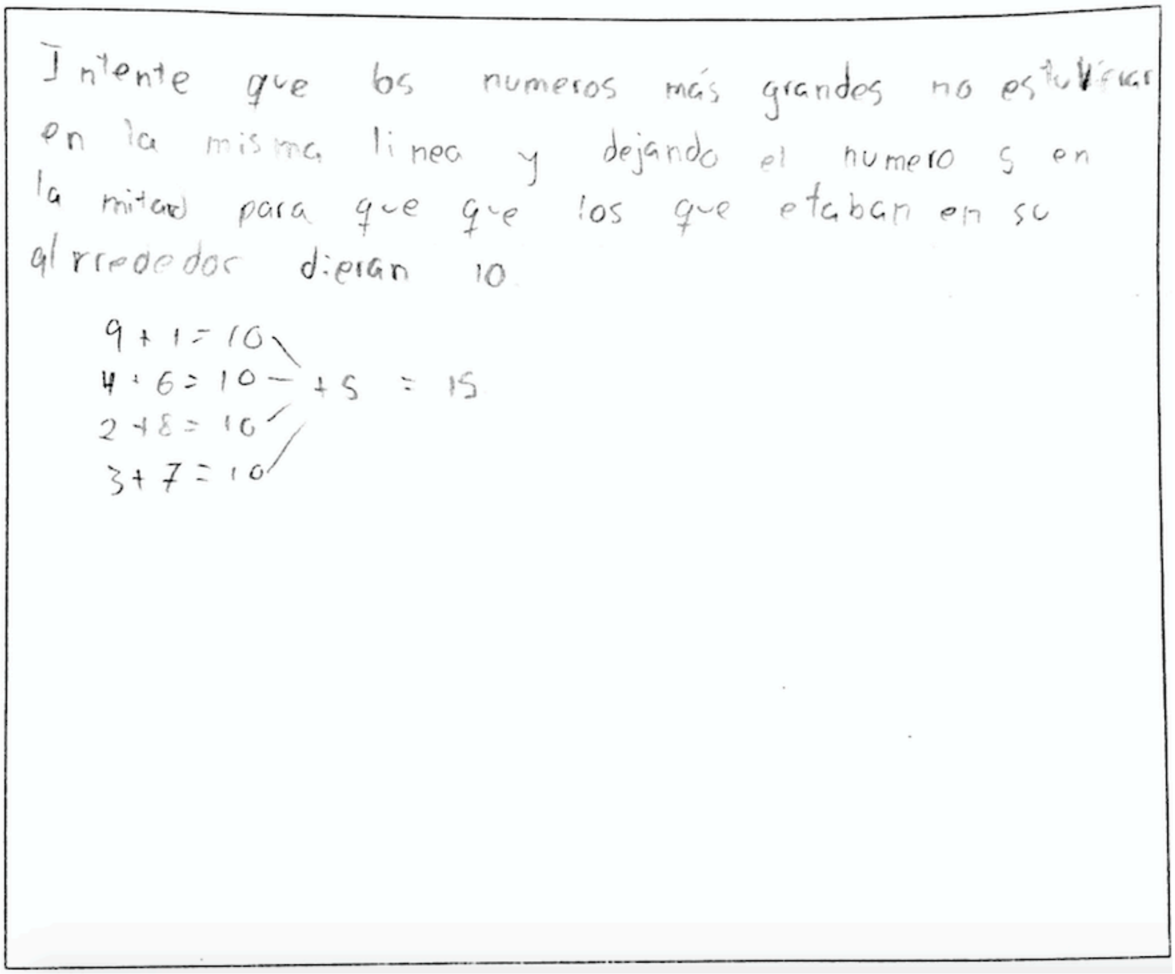
(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)
(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)

Figura 29. Pareja de números que establece la posición en la cuadrícula.

Para dar inicio a la socialización de la actividad, el docente aborda la construcción del cuadrado mágico de lado tres, cuyos términos corresponden a los números naturales 1 a 9, como sigue:

1. Docente: hablemos primero sobre lo que hicimos mal y después hablamos sobre como si armarlo (…) [el símbolo (…) se usará para representar la existencia de elementos del discurso o situaciones que no fueron transcritas] ¿Qué se hizo mal?
2. Estudiante E: intenté no poner en la misma fila, columna o diagonal 9, 7 y 8.
3. Docente: no poner en la misma fila, columna o diagonal 9, 7 y 8. ¿Por qué?
4. Estudiante E: porque al sumarlos, cualquiera de esos tres da 15 o más.
5. Docente: al sumar solamente dos de ellos ya se pa*sa, cierto* [la letra cursiva representa el momento en que el hablante de la línea siguiente interrumpe al hablante de esta línea].
6. Estudiante E: y.. [los dos puntos que siguen a una palabra representan la extensión sonora de la misma] 9 y 6.
7. Docente: ¡ah! y 9 y 6, claro 9 y 6 da 15 de una vez luego no se puede. ¿Qué más?
8. Estudiante G: colocar números más pequeños juntos.
9. Docente: ¡ah..! colocar números pequeños juntos. ¿Por ejemplo?
10. Estudiante G: el 1, 3 y 2.
11. Docente: (…) también, no alcanza para que la suma de 15.

Tal conversación indicaba la existencia de números "grandes" y "pequeños". De forma implícita, comparados con el número 5, que corresponde a la mediana del conjunto de números, a ubicar en el cuadrado mágico. Así mismo la Figura 30, muestra el razonamiento de un estudiante que implica que, si números "grandes" y "pequeños" no pueden estar juntos, entonces el número 5 debe ubicarse en la posición (2, 2).


Intente que los numeros más grandes no estuvieran en la misma linea y dejando el numero 5 en la mitad para que que los que etaban en su alrrededor dieran 10

9 + 1 = 10
4 + 6 = 10 + 5 = 15
2 + 8 = 10
3 + 7 = 10

Figura 30. Explicación que implica la ubicación del número 5 en la posición (2, 2).

De igual forma en la etapa de socialización, de acuerdo a la búsqueda de estrategias fallidas en la construcción del cuadrado mágico, una estudiante manifiesta, haber intentado ubicar los números de forma consecutiva, es decir llenar en cuadrado mágico de izquierda a derecha tomando números consecutivos. Tal organización de los números no corresponde a un cuadrado mágico. Sin embargo, en esta prueba el número 5, queda ubicado en la posición (2, 2) y con una exploración más profunda, podría llegarse a la solución del problema.

Al tratar los arreglos de números que son solución al problema, el docente traza una cuadrícula cuadrada, compuesta por nueve cuadrados en el tablero. Se dirige al grupo de estudiantes, como sigue:

1. Docente: ¿cuál es el número de la mitad?
2. Estudiantes en coro: 5.

3. Docente: voy a hacer lo siguiente [escribe los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 encima de la cuadrícula en blanco, subraya los números 6, 7, 8, 9 indicando que no pueden pertenecer juntos a una misma, fila, columna o diagonal. Lo mismo hace con 1, 2, 3, 4].
4. Docente: (…) ¿el número de la mitad es?
5. Estudiantes en coro: 5. [mientras, el docente escribe el número 5 en la posición (2, 2) de la cuadrícula].
6. Docente: ¿será que hay una relación entre la lista y la posición del número en el cuadrado?
7. Estudiante M: o sea las diagonales (…) [el estudiante se levanta de su puesto e inmediatamente el maestro estira su brazo ofreciendo el marcador de tablero].
8. Docente: hágale pues.
9. Estudiante M: hice que la suma de este [señala la posición (1, 2)] y este [señala la posición (3, 2)] y era 10, y este [señala la posición (2, 1)] y este [señala la posición (2, 3)] 10 y estos dos [señala en ese orden las posiciones (1, 1), (3, 3), (3, 1) y (1, 3)]
10. Docente: ¡ah..! completabas de tal forma que diera 10.
11. Estudiante M: y con la lista que este y este [señalando de la lista los números 9 y 1] estuvieran acá [señala las posiciones (1, 2) y (3, 2)] o acá [señala las posiciones (2, 1) y (2, 3)], y este y este [señalando de la lista los números 3 y 7] también acá o acá [señalando de forma rápida, las mismas posiciones que pueden asignarse a los números 9 y 1].
12. Docente: ¿puedes ubicarlos? [el estudiante ubica los números 1, 3, 7 y 9 (Figura 31)].
13. Estudiante M: ah y los otros [señalando a la lista de números] tienen que quedar.. [señala en ese orden las posiciones (1, 1), (3, 1), (1, 3) y (3, 3) y completa el cuadrado mágico].

Figura 31. Ubicación de los números impares de los términos listados.

Como se observa en el diálogo, el estudiante M organiza los números teniendo en cuenta al 5 como elemento de referencia. Ubica parejas de números que se encuentran a la misma distancia del 5 en posiciones opuestas relativos a la posición (2, 2). Así pues, establece una relación entre la lista y la posición de tales números en la cuadrícula.

Luego de la construcción del cuadrado mágico, el docente pregunta sobre la unicidad de la solución, a lo cual los estudiantes responde en coro, no. Dos estudiantes pasan al tablero para mostrar otras soluciones al problema (Figura 32).

6	1	8
7	5	3
2	9	4

8	1	6
3	5	7
4	9	2

2	7	6
9	5	1
4	3	8

Figura 32. Tres soluciones distintas al problema dadas por los estudiantes.

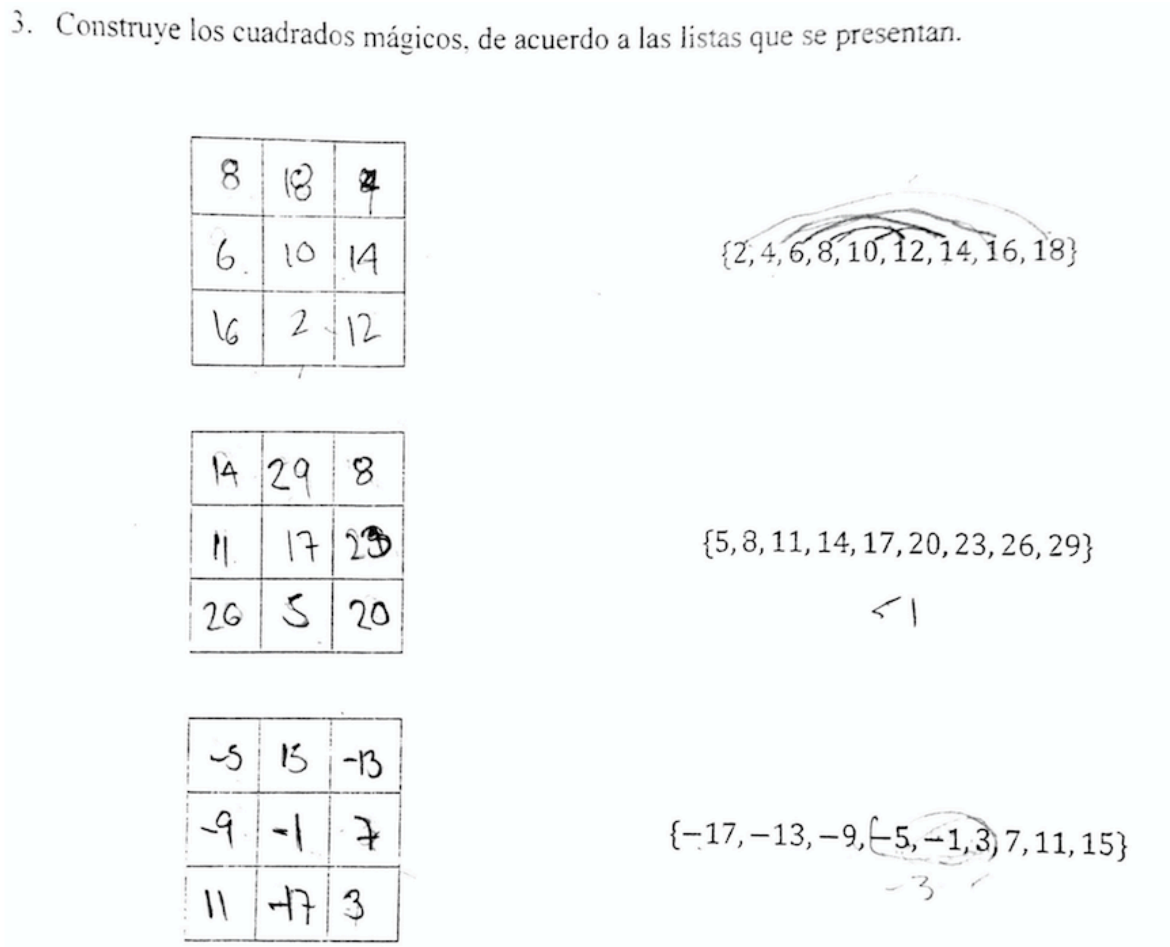
Los estudiantes conjeturan, que puede construirse cuadrados mágicos, a partir de reflexiones (como en el caso del arreglo central presentado en la Figura 32 donde se intercambian las columnas 1 y 3, de la primera solución) y rotaciones (como en el caso del arreglo de la derecha de la Figura 32, correspondiente al arreglo de la izquierda que es girado 90^{o} en sentido anti horario) de una solución conocida.

Conclusión: el mecanismo utilizado por los estudiantes para resolver el problema, fue la prueba por ensayo y error. En la socialización se pudo evidenciar, que los estudiantes reconocen que no existe una única respuesta al problema, o mejor, una única forma de presentarla, puesto que el arreglo de números puede rotarse y reflejarse, manteniendo la propiedad de ser cuadrado mágico. La acción de señalar, resulta ser un apoyo relevante en la comunicación verbal de los estudiantes, sobre la construcción del cuadrado mágico.

Resultado pregunta 3.

Pregunta 3. Construye los cuadrados mágicos, de acuerdo a las listas que se presentan.

La tercera pregunta se plantea con el fin de que los estudiantes, reconozcan patrones relacionados con la construcción de cuadrados mágicos de lado tres y establezcan mecanismos para construirlos. A diferencia del primer punto, para cada cuadrado mágico sólo se presentó una cuadrícula en blanco, como puede notarse en la Figura 33, esto con el fin de sugerir a los estudiantes, el uso de lo aprendido en el primer ejercicio.



3. Construye los cuadrados mágicos, de acuerdo a las listas que se presentan.

8	18	4
6	10	14
16	2	12

$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

14	29	8
11	17	23
26	5	20

$\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$

<1

-5	15	-13
-9	-1	7
11	-17	3

$\{-17, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15\}$

-3

Figura 33. Solución de un estudiante a la tercera pregunta de la actividad.

Conclusión: Diez estudiantes de la muestra, construyeron los cuadrados mágicos de acuerdo a las sucesiones presentadas. En las respuestas dadas por estos estudiantes, se identifica una relación entre la posición de un número de la lista y la posición del mismo en el cuadrado mágico. Ello supone que tales estudiantes, reconocen ("ven") un patrón para la construcción de cuadrados mágicos de lado tres, compuestos por términos de una sucesión aritmética. Con las preguntas posteriores se busca que los estudiantes analicen y sean conscientes de los patrones encontrados.

Uno de los estudiantes, pudo construir el segundo cuadrado mágico de la lista, pero no el primero ni el tercero. Adicionalmente tres de los estudiantes de la muestra, no dieron respuesta a la pregunta.

Resultado pregunta 4.

Pregunta 4. De acuerdo a lo anterior responde las siguientes preguntas:

a) ¿Qué tienen en común las listas de números que se utilizan para construir los cuadrados mágicos propuestos?

b) ¿Existe alguna relación entre la posición de los números en la lista y la ubicación de estos en el cuadrado mágico? ¿cuál?
c) Explica detalladamente el método que seguiste para construir los cuadrados mágicos propuestos en el literal 3.

Acerca de las listas de los números, con los que se construyen los cuadrados mágicos, los estudiantes determinaron explícitamente que:

- *Siempre tienen 9 números.*
- *Sin importar donde empiecen, siempre van de uno en uno, dos en dos, tres en tres, etc.*
- *Siempre están organizados consecutivamente, sumándole o restándole.*

Lo anterior evidencia que los estudiantes, reconocen características comunes relativas a sucesiones aritméticas. "Ven", "dicen", "registran" patrones de las listas de números con las que se construyen cuadrados mágicos.

Acerca de la relación entre la posición de los números en la lista y la ubicación de estos en el cuadrado mágico, los estudiantes exponen relaciones cómo:

- *El número más grande está en la columna de la mitad y en la última fila, y el menor se encuentra en la misma columna en la primera fila.*
- *Se ubican en escalera de menor a mayor.*
- *El número de la mitad de la lista es el que va en la casilla central del cuadrado.*
- *El número de casillas es la misma que la cantidad de números de la lista.*
- *El primer número de cada secuencia iba en la misma casilla.*

En la etapa de socialización de la actividad, algunos estudiantes encontraron una relación entre la posición de tres números de la lista y el valor de la suma (cifra mágica) que caracteriza a los cuadrados mágicos, como sigue:

1. Estudiante M: (para el primer cuadrado los números organizados debían sumar tanto) [el paréntesis encierra una transcripción que no es segura o precisa, corresponde a la suposición más probable], para encontrarlo.. yo.. conté los números y me ubique en la mitad, entonces sume los tres de la mitad y ahí encontraba el valor de la suma.
2. Docente: ¡ah..! para saber cuál es el valor de la suma (…), o sea tomaba la lista de números [abriendo los brazos y dirigiéndose a la lista 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, escrita en el tablero], ¿y qué hiciste ahí?
3. Estudiante M: tomaba 4, 5 y 6.
4. Docente: [enmarca los números 4, 5 y 6 de la lista escrita en el tablero] ¿todos están de acuerdo con eso?
5. Estudiantes en coro: sí.
6. Docente: miremos uno de los que está ahí, voy a poner el segundo [el docente escribe en el tablero la lista 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29]. Entonces de acuerdo a lo que dice usted, la suma debería ser.. ¿cuál?

7. Estudiante M: 14, 17 y 20.
8. Docente: o sea 51. ¿A todos les dio 51?
9. Estudiantes en coro: sí.

Esto supone la "prueba de la validez de una fórmula" para determinar la cifra mágica, aunque dicha fórmula no se explicite de forma simbólica, se presenta un estrato de generalidad *contextual*, puesto que el medio semiótico para expresarla es la frase "sumar los tres números de la mitad, para encontrar el valor de la suma", además reconoce que el valor de la suma puede ser arbitrario.

Acerca de los métodos utilizados por los estudiantes para construir los cuadrados mágicos, se resaltan los siguientes:

Una estudiante describe:

En primer lugar, ubica en la casilla central del cuadrado mágico (2, 2) el número que se encuentra en la mitad de la lista. Sigue ubicando los números teniendo en cuenta el valor de la cifra mágica y que los números de *casillas opuestas*, con relación a la casilla central, se determinan sumando y restando la misma cantidad al número ubicado en la casilla central. Como ejemplo muestra, el cuadrado mágico inicial (tortuga) el número 5 lo ubica en la posición (2, 2), a 5 suma 3 y resta 3, obteniendo 8 y 2, tales números los ubica respectivamente en las casillas (1, 3) y (3, 1), a 5 le suma 4 y resta 4, obteniendo 9 y 1, tales números los ubica respectivamente en las casillas (1, 2) y (3, 2), el resto de los números los ubica teniendo en cuenta la cifra mágica.

Otro método utilizado por un estudiante en la construcción de los cuadrados propuestos se presenta a continuación tomando como base la transcripción del video, correspondiente a la etapa de socialización:

1. Estudiante E: lo que yo hice, fue digamos en este [señala un cuadrado mágico de lado 3, que da solución al problema de la tortuga] multiplicar cada número que estaba ahí por 2. Digamos 1 por 2 [señala la posición (2, 3) donde se ubica el número 1 y en la misma posición en una cuadrícula en blanco, ubica al número 2].
2. Docente: ¿o sea vas a ubicar los números 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 y 18?
3. Estudiante E: si, 2 por 8, 16 [señala la posición (3, 3) donde se localiza el 8 y escribe 16 en la misma posición sobre la cuadrícula].

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	14	12
18	10	2
8	6	16

Figura 34. Transcripción de los cuadrados utilizados por el estudiante E, al construir el cuadrado mágico compuesto por los números 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 y 18.

El estudiante completa la cuadrícula en blanco, repitiendo el método descrito, en el proceso deja de señalar a las posiciones, sólo dice 3 por 2, 6, 2 por 4, 8, 2 por 9, 18, 10, 12, 14 y 4. En la Figura 34, se presentan el cuadrado mágico en el que se basó para explicar el método y la solución del estudiante para el problema de construir un cuadrado mágico con la lista de números, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16 y 18.

4. Docente: ¿es un cuadrado mágico?
5. Estudiantes en coro: sí.
6. Docente: ¿y para construir los otros?
7. Estudiante E: [señalando la lista 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29 escrita previamente en el tablero] El número que está ahí [señala el número 5], debe estar en la misma casilla que esta el 1 y 2. [escribe 5 en la posición (2, 3) de una cuadrícula en blanco]. El 8 debe estar con la que está el 2 y el 4 [escribe 8 en la posición (1, 1)], y así.
8. Docente: o sea los ubicaste de acuerdo a la posición en la lista.
9. Estudiante E: si [continua llenando la cuadrícula, obteniendo una configuración de los números como la que se muestra en el cuadrado de la derecha en la Figura 35]

2	7	6
9	5	1
4	3	8

4	14	12
18	10	2
8	6	16

8	23	20
29	17	5
14	11	26

Figura 35. Transcripción de los cuadrados utilizados por el estudiante E, en la explicación de su método.

El método descrito por el estudiante, da cuenta de las etapas *ver, decir cuál es el patrón, registrar el patrón y probar de la validez de fórmulas.* Además, localiza al estudiante en el estrato de generalidad *contextual*, puesto que el estudiante hace una descripción que se acopla a la construcción de cualquier cuadrado mágico. y utiliza frases clave como: “el primero de la lista debe estar en la misma casilla que esta el 1 y 2”. El señalamiento de las posiciones de los números en las listas y cuadrados mágicos es un medio semiótico que apoya la explicación del método.

En general los estudiantes describen métodos, donde copian la estructura del cuadrado mágico propuesto en el problema de la tortuga de acuerdo a la posición de un número en la lista. Similar a la descripción que hace el estudiante E, a partir de la línea 7, de la transcripción.

En la Figura 36 se presenta la explicación del método utilizado por un estudiante, en el que se pone en evidencia, el uso del cuadrado mágico relativo al problema de la tortuga. En esta, el estudiante manifiesta que el método apareció como una serendipia, luego de que la hoja se le cayera al suelo.

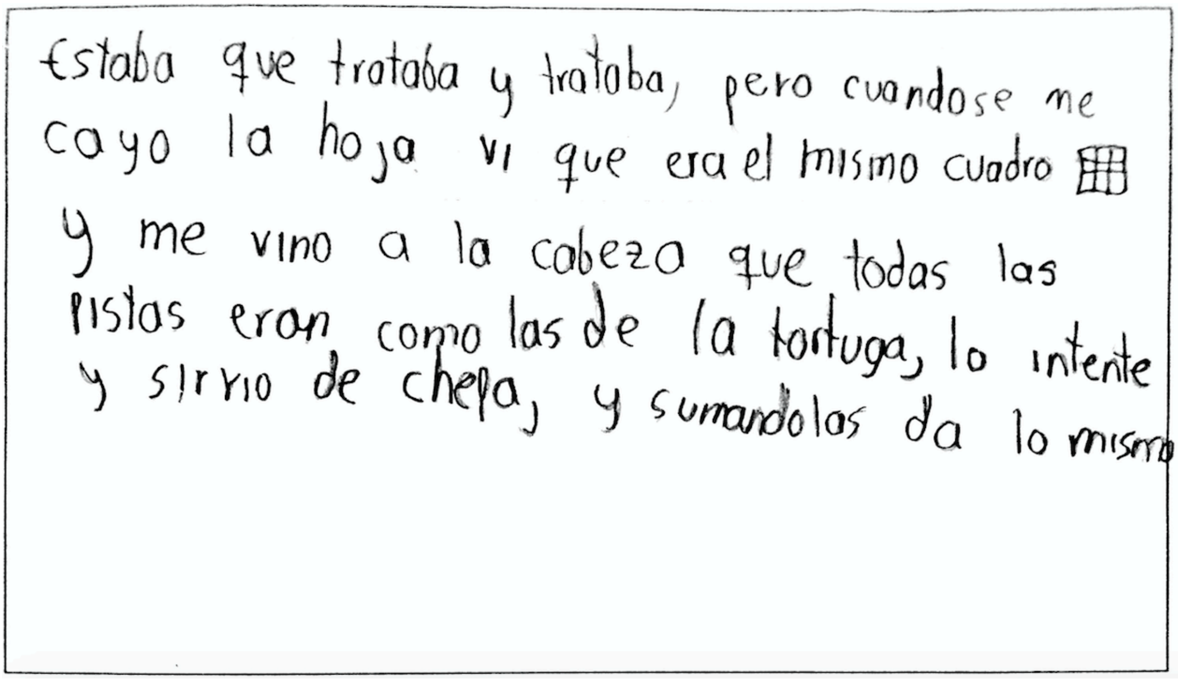

Estaba que trataba y trataba, pero cuandose me
cayo la hoja vi que era el mismo cuadro
y me vino a la cabeza que todas las
pistas eran como las de la tortuga, lo intente
y sirvio de chepa, y sumandolas da lo mismo

Figura 36. Explicación del método de un estudiante.

Conclusión: Diez estudiantes, "ven", "dicen", "registran" patrones y "prueban fórmulas" para la construcción de cuadrados mágicos de lado 3. El estrato de generalidad predominante es el *contextual,* puesto que la expresión de la generalidad se hace a través de frases clave. El señalar posiciones de un número en la lista o en un cuadrado mágico, es un gesto que apoya al discurso. Los estudiantes no llegan a acuerdos sobre como referirse a la posición de un número en un arreglo matricial, puesto que aún no es una necesidad.

4.2.2. Actividad 2.

Fecha: 1 y 15 de septiembre de 2015

Número de estudiantes: 14 (septiembre 1) y 10 (septiembre 15)

Objetivos:

- Facilitar la construcción de cuadrados mágicos, a través de la elaboración de material concreto.
- Reconocer patrones en las sucesiones aritméticas.
- Utilizar patrones en la construcción de cuadrados mágicos de lado tres.

La actividad se desarrolló en dos sesiones de clase; en la primera de ellas a la cual asistieron catorce estudiantes, se dieron las pautas para elaborar un material concreto que facilitará la construcción de cuadrados mágicos y se formularon dos preguntas relacionadas con la caracterización de sucesiones aritméticas. En la segunda sesión a la cual asistieron diez estudiantes, se hizo la socialización de lo obtenido en la primera sesión y además, se complementó con un trabajo en grupo en torno a dos nuevas preguntas relacionadas con la construcción de cuadrados mágicos.

De acuerdo a las dificultades que se presentaron en la actividad 1, relacionadas con la construcción por ensayo y error de los cuadrados mágicos, se decidió implementar una estrategia distinta que facilitará la construcción de los cuadrados mágicos. Así pues, surge la idea de construir un material concreto, que evitará la tarea de escribir y borrar que, según manifestaron los estudiantes, fue engorrosa.

El material concreto consta de una cuadrícula cuadrada en cartón paja, cuyas dimensiones son 21 cm x 21 cm, y está dividida en 49 cuadrados con dimensiones 3 cm x 3 cm. Dentro de la cuadrícula se resaltan cuadrículas internas con dimensiones 15 cm x 15 cm y 9 cm x 9 cm, las cuales se usan de acuerdo al tamaño del cuadrado mágico que se desee construir. Como se muestra en la Figura 37.

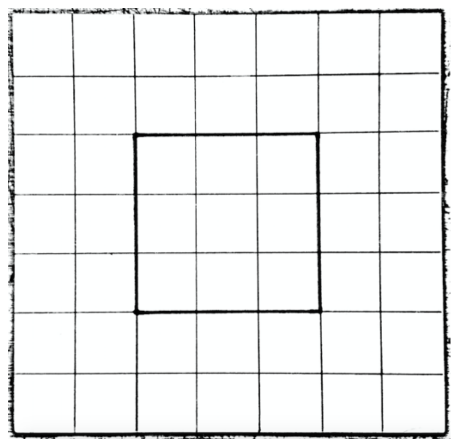


Figura 37. Cuadrícula en cartón paja, de lado 21 cm.

Adicionalmente, se construyen 9 cuadrados, en cartón paja o cualquier tipo de papel, (puesto que aún se está trabajando con cuadrados mágicos de lado 3) con dimensiones 3 cm x 3 cm, en el que se escriben los números que conforman los cuadrados mágicos y que hacen el papel de fichas, como si se tratase del juego infantil conocido como lotería (Figura 38). En un primer momento se le pide a los estudiantes que los dejen en blanco, puesto que en la segunda etapa de la actividad, se dan las pautas para marcarlos.

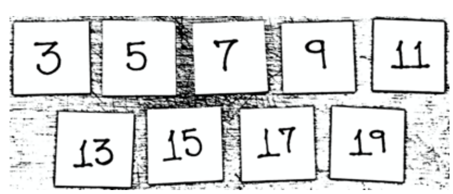


Figura 38. Cuadrados de lado 3 cm, marcados con los términos de una sucesión aritmética.

El material concreto, permite a través de la manipulación de la fichas, establecer arreglos numéricos sin tener que escribir y borrar (Figura 39). Esto involucra la lúdica en la construcción de cuadrados mágicos.

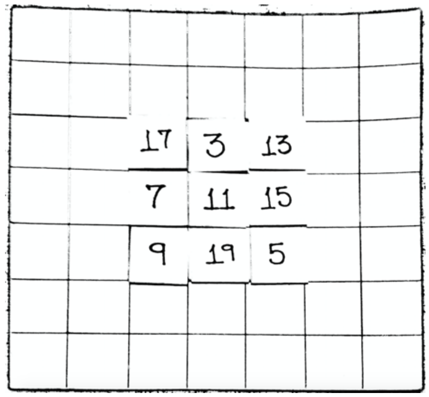
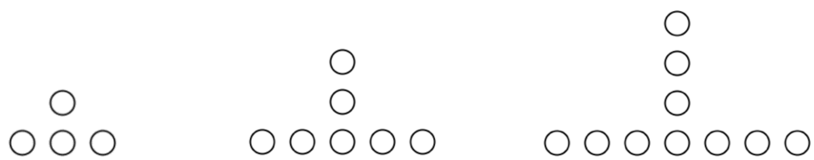


Figura 39. Ejemplo de la construcción de un cuadrado mágico de lado 3, a partir del material concreto.

Así pues, cada uno de los estudiantes construyó su propio material de trabajo. La cuadrícula que asemeja un tablero cuadrado y los cuadrados en blanco que simulan fichas.

En la formulación de las preguntas relacionadas con el reconocimiento de patrones en las sucesiones aritméticas, se presentaron a los estudiantes, todas las sucesiones aritméticas trabajadas en sesiones previas (Tabla 1).

Tabla 1. Secuencias trabajadas por los estudiantes a lo largo del taller.

Clase	Secuencia
1. Prueba diagnóstica	 figura 1. figura 2. figura 3.
2. Actividad 1.	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ $\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$ $\{-17, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15\}$

Resultado pregunta 1.

Pregunta 1. ¿Cómo son las secuencias presentadas hasta el momento? (caracterícelas)

A continuación se presenta la transcripción de un fragmento del video, correspondiente a la socialización de las respuestas dadas por los estudiantes a las preguntas formuladas en la actividad.

1. Docente: … ¿cómo son las secuencias? ¿qué características tienen?
2. Estudiante M: van aumentando.

3. Docente: van aumentando, ¿cómo así?
4. Estudiante M: una cantidad determinada,… o sea, se tiene el primer número y va aumentando de a 2 o de a la cantidad que yo quiera.
5. Docente: o sea empieza de un número y va aumen*tando.*
6. Estudiante M: una cantidad determinada. O sea, si yo digo de 1 a 3, entonces todos tienen que aumentar de a 2.
7. Docente: muy bien, ¿alguna otra característica?
8. Estudiante N: todos tienen 9. (…) La cantidad de números son 9.
9. Docente: (…) ¿qué más?
10. Estudiante S: van aumentando constantemente.
11. Docente: ¿importa dónde empiece?
12. Estudiante N: no importa en reali*dad.*
13. Estudiante M: (…) puede empezar en cualquier número, pero tiene que aumentar siempre [señalando saltos (espiral) con el dedo índice].
14. Docente: ¿alguien encontró otra cosa o sólo eso?
15. Estudiantes en coro: sólo eso.

Así pues, en la línea 13 de la transcripción de la socialización, se reconoce el estrato de generalidad *factual*, puesto que el estudiante utiliza gestos para expresar la diferencia común en los términos de la sucesión aritmética. También en las líneas 4 y 13 se reconoce un estrato de generalidad, que corresponde al estrato *contextual*, puesto que las frases "… de a la cantidad que yo quiera" y "… empezar en cualquier número", son utilizadas para expresar características comunes de las sucesiones aritméticas.

Adicionalmente en la Figura 40, se presenta la respuesta de un estudiante, que sugiere que otra de las características de las sucesiones, es el orden ascendente de los números de las secuencias. Esto indica que en el diseño de las actividades deben presentarse, ejemplos de sucesiones cuya diferencia común sea un entero negativo.

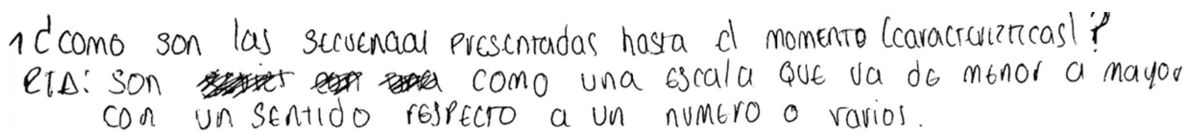

1 ¿como son las secuencias presentadas hasta el momento (caracteristicas)?
R/: son como una escala que va de menor a mayor con un sentido respecto a un numero o varios.

Figura 40. Característica de orden, derivada de los ejemplos abordados en las actividades previas.

Conclusión: La totalidad de los estudiantes, reconoce las características propias de las sucesiones aritméticas. Sin embargo, los ejemplos que hasta ese momento se presentaron, sugieren que los términos de las sucesiones aritméticas únicamente se dan en orden ascendente. Ello indica que los estudiantes "ven", "dicen" y "registran" patrones, además sugiere que en el diseño de las actividades, debe tenerse en cuenta sucesiones en donde la diferencia común sea un entero negativo.

Resultado pregunta 2.

Pregunta 2. Lance el dado dos veces y construya una secuencia como las anteriores, involucrando los números obtenidos en los lanzamientos.

A cada uno de los estudiantes se les pidió hacer dos lanzamientos de un dado; con los resultados obtenidos en cada uno de ellos, se pretendía que los estudiantes construyeran sucesiones aritméticas, para afianzar así, el reconocimiento de sucesiones aritméticas.

1. Docente: (…) ¿qué te salió cuando lanzaste los dados?
2. Estudiante L: me salió 6 y 2.
3. Docente: 6 y 2.
4. Estudiante L: entonces lo que yo escribí es la diferencia entre 6 y 2.
5. Docente: dale [estirando la mano para ofrecer el marcador a la estudiante] entonces lanzaste 6 y 2.
6. Estudiante L: [escribe en el tablero la sucesión 2, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34] entonces la diferencia entre 6 y 2, era como un patrón, iba aumentando de a 4.
7. Docente: o sea que los dos numeritos que tenías..
8. Estudiante L: los reste.
9. Docente: los restaste y esa siempre va a ser tu diferencia.
10. Estudiante L: [asiente con la cabeza]
11. Docente: ¿será que hubiese ocurrido algo si tomo los dos primeros números al revés?
12. Estudiante M: no, siempre tiene que ir aumentando.
13. Docente: ¿siempre tienen que aumentar?
14. Estudiantes B, L: no, no necesariamente.
15. Docente: bueno, entonces en estos de acá, los voy a encerrar [encierra los números 2 y 6, de la sucesión escrita en el tablero], estos eran los dos numeritos que sacaste [mirando a la estudiante L], eran los números con los que iniciaste la secuencia, bueno muy bien muchas, gracias ¿alguien más?
16. Estudiante S: [levanta la mano]
17. Docente: ¿recuerdas los números que sacaste?
18. Estudiante S: 5 y 2.
19. Docente: [entrega el marcador al estudiante S], hágale a ver.
20. Estudiante S: [escribe en el tablero la secuencia 2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32]
21. Docente: ¿están de acuerdo con esta secuencia?
22. Estudiante N: no, tienen que ser 9 números.
23. Docente: ¿no? [cuenta la cantidad de términos de la sucesión escrita por el estudiante S], bueno, se ajusta a una secuencia, ¿pero que podemos decir acerca de esta secuencia [señala la sucesión] y un cuadrado mágico? [los estudiantes guardan silencio] ¿los que hemos construido cómo son?
24. Estudiante N: de 9 números.
25. Docente: entonces esta tiene 11, luego se pasa por 2 ¿qué arreglo tendría que hacerle?
26. Estudiantes en coro: quitarle 2.
27. Docente: ¿cuáles 2?
28. Estudiantes M, N: los 2 últimos.
29. Docente: ¿y si quito los dos primeros?
30. Estudiantes L, M, S, F: también se puede
31. Estudiante G: (…) también sirve, pero esos son los que le salieron.
32. Docente: también sirve, pero esos son los que le salieron.
33. Estudiante L: no, no importa
34. Estudiante F: también sirve, pero necesita de esos 2, porque son los que le salieron.

35. Estudiante M: se puede hacer con más números, pero para los grandes [haciendo referencia a cuadrados mágicos de lado mayor].

La mayoría de los estudiantes, tomó los dos lanzamientos como los primeros números de la sucesión (siendo el menor de ellos el primer término), y con la diferencia entre estos, determinó los demás términos de la sucesión, que en general tenían nueve.

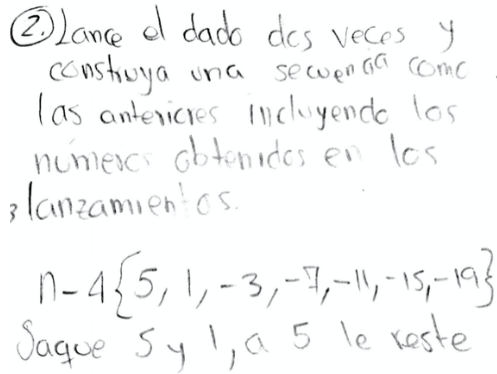


Figura 41. Sucesión en orden descendente, presentada por un estudiante.

Uno de los estudiantes construyó una sucesión aritmética, en orden descendente (Figura 41), este caso fue pertinente, para que los estudiantes reconocieran la posibilidad de construir sucesiones cuya diferencia común, fuese un entero negativo. Este caso fue, socializado por el docente en la etapa de socialización, como sigue a continuación:

1. Docente: (…) este estudiante saco los números 5 y 1, y entonces el escribe esta [escribe en el tablero la sucesión 5, 1, -3, -7, -11, -15, -19] ¿qué opinan acerca de esta secuencia?
2. Estudiante N: que le faltan 2 números.
3. Docente: o sea no serviría para construir un cuadrado mágico, listo y ¿qué más ven?
4. Estudiante M: pero se podría completar.
5. Estudiante L: que le va restando 4 al primer número.
6. Docente: le va restando 4 al número principal, ¿ustedes me creen si les digo que le está sumando -4?
7. Estudiantes en coro: si
8. Docente: ah bueno, muy bien. ¿qué tendría que tener esta [señala a la sucesión escrita en el tablero] para construir un cuadrado mágico?
9. Estudiante L: poner 2
10. Docente: debo poner 2 números más, digamos -23 cierto y -27.

Adicionalmente en la Figura 41, el estudiante utiliza la expresión simbólica $n - 4$, para representar que cualquier término de la sucesión, se halla restando cuatro del anterior. Para esta expresión de la generalidad, el estudiante hace una *contracción semiótica,* haciendo una reducción del lenguaje, lo cual es propio del estrato *simbólico*.

Posteriormente, el docente presenta una secuencia dada por una estudiante (Figura 42), con el fin de determinar las razones del porqué no corresponde a una sucesión aritmética. Así pues los estudiantes reconocen, que la diferencia entre el primer y segundo término de la sucesión, es distinta a la diferencia entre dos términos consecutivos de la misma. Además proponen, que la sucesión podría ajustarse, cambiando el primero de los términos por el número cero.

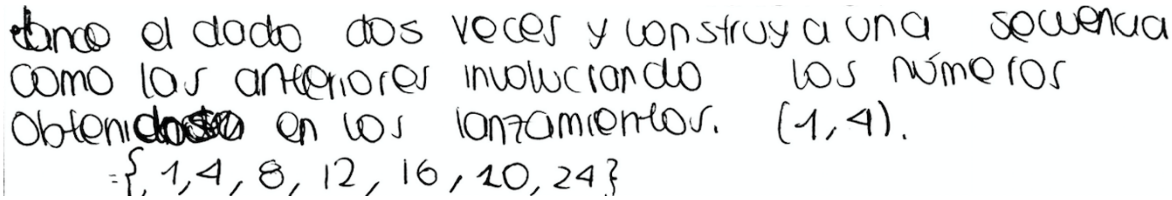

Lanzo el dado dos veces y construya una secuencia como los anteriores involucrando los números obtenidos en los lanzamientos. (1,4).
$=\{1, 4, 8, 12, 16, 20, 24\}$

Figura 42. Sucesión en orden descendente, presentada por un estudiante.

Conclusión: La totalidad de estudiantes presentes en la socialización de la actividad (diez) "ve", "dice", "registra" patrones y "prueba formulas" concernientes al reconocimiento de las sucesiones aritméticas. Además expresa la generalidad de acuerdo al estrato *contextual*, puesto que utilizan expresiones como "aumenta una cantidad determinada", "le va restando 4" y "puede empezar desde cualquier número" para expresar características de sucesiones aritméticas. En este caso los gestos son usados, para apoyar la comunicación verbal, sin el medio semiótico predominante en la expresión de la generalidad. Además uno de los estudiantes, utiliza símbolos para representar una de las características de las sucesiones aritméticas.

En la formulación de la pregunta, se dejó de forma abierta la manera en que los estudiantes, podían vincular los números obtenidos en los lanzamientos, a la sucesión aritmética, con el fin de motivar la creatividad en la resolución de la pregunta. Sin embargo, la totalidad de los estudiantes utilizó los números de sus lanzamientos, como los dos primeros términos de sus sucesiones. Este hecho dio pie a la formulación de una nueva pregunta, qué obligara a los estudiantes a utilizar más recursos en la construcción de sus sucesiones.

1. Docente: ¿cómo más se pueden vincular? [se toma el ejemplo de obtener 6 y 2 en los lanzamientos].
2. Estudiante J: comienzo desde 6 y para aumentar le doy de a 2, o sea 6, 8, 10
3. Docente: ¡ah! Y le aumentas el 2, o sea que el otro dado puede ser la cantidad que ¿qué?
4. Estudiante N: que aumenta.
5. Estudiante F: (…) digamos que me salió 6, lo ponemos en la mitad y le sumamos 2 y restamos 2, a la derecha queda 8 y a la izquierda 4.
6. Docente: y así sucesivamente, ¿otra forma? [estudiantes en silencio], bueno les voy a poner un problema relacionado con esto.

Resultado pregunta 3.

Pregunta 3. Con los números 3 y 2, construya una secuencia como las trabajadas en clase, que puedan usarse en la construcción de un cuadrado mágico de lado tres. Tenga en cuenta que todas las secuencias del curso deben ser distintas, lo cual implica patentar la secuencia con el docente.

El docente explica lo que significa patentar la secuencia en ese contexto, como un proceso en cual se tiene la certeza de que las sucesiones aritméticas construidas por los estudiantes sean diferentes. Consiste en que por orden de llegada, cada estudiante presente su sucesión al docente, para que sea avalada y sea escrita en el tablero, esto para el conocimiento de todos. Las sucesiones que se encuentren en el tablero no podrán repetirse.

En el ejercicio se presentó, que la última sucesión escrita en el tablero no fue revisada previamente por el docente, puesto que el estudiante que la formuló, no trabajó de forma activa durante el desarrollo del ejercicio. El estudiante finalmente participó, luego de que el docente le indicara que hiciera su propuesta en el tablero. Así pues las sucesiones presentadas por los estudiantes fueron:

$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$	$\{5,8,11,14,17,20,23,26,29\}$
$\{5,4,3,2,1,0,-1,-2,-3\}$	$\{3,2,1,0,-1,-2,-3,-4,-5\}$
$\{3,5,7,9,11,13,15,17,19\}$	$\{5,10,15,20,25,30,35,40,45\}$
$\{-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$	$\{-35,-30,-25,-20,-15,-10,-5,0,5\}$
$\{-1,-2,-3,-4,-5,-6,-7,-8,-9\}$	$\{\mathbf{6,12,24,48,96,192,384,768,1536}\}$

De acuerdo a esta última sucesión se presentó el siguiente diálogo:

1. Docente: ¿estas multiplicando por 2, cierto?
2. Estudiante S: si
3. Docente: (…) pregunta ¿esa secuencia [señala a la última secuencia] se ajusta a estas [señala a las otras]? ¿se parece a estas?
4. Estudiantes en coro: si, no [las opiniones de los estudiantes son divididas]
5. Docente: devolvámonos un poquito, cuando empezamos la sesión de hoy, empezamos caracterizando estas secuencias. [estudiante N levanta la mano], ¿señor?
6. Estudiante N: tienen que tener un aumento constante.
7. Docente: un aumento constante, o sea de acá a acá [señala los dos primeros términos de la primera sucesión] siempre le aumento..
8. Estudiantes en coro: 1 [el docente escribe $+1$ entre los términos de la sucesión]

Así pues el docente escribe sobre los dos primeros términos, de cada una de las sucesiones escritas en el tablero, el signo "$+$" seguido de la diferencia entre dichos términos. Sin embargo, en la última sucesión $(6, 12, 24, \ldots, 1536)$, escribe en el tablero "$+$ 6" y pregunta a los estudiantes, si esto se da para cualquier par de términos consecutivos de la secuencia. A lo cual los estudiantes responden negativamente, y sugieren que lo que esta pasando es que se esta multiplicando por 2, luego el docente borra los símbolos "$+$ 6" y escribe "x 2".

9. Docente: ¿se ajusta a estas? [señala nuevamente las sucesiones escritas en el tablero]
10. Estudiantes en coro: no.

Conclusión: Todos los estudiantes aportaron sucesiones distintas, basada en los números 3 y 2. Sin embargo, nueve de tales sucesiones fueron aritméticas y una resultó ser geométrica, esto posibilitó que los estudiantes reconocieran la diferencia entre las sucesiones aritméticas y geométricas (sin hacer mención a tales nombres).

Resultado pregunta 4.

Pregunta 4. En grupos de tres, construir tres cuadrados mágicos de lado tres con el material concreto, a partir de las secuencias que cada uno propuso. Además, cada grupo deberá intentar construir un cuadrado mágico con la secuencia $\{6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536\}$

El docente propone que primero, construyan los cuadrados mágicos con las sucesiones aritméticas y que por último resuelvan el problema con la sucesión geométrica.

A continuación se muestra la Figura 43 que corresponde a dos cuadrados mágicos realizados por los estudiantes, construidos con las sucesiones aritméticas:

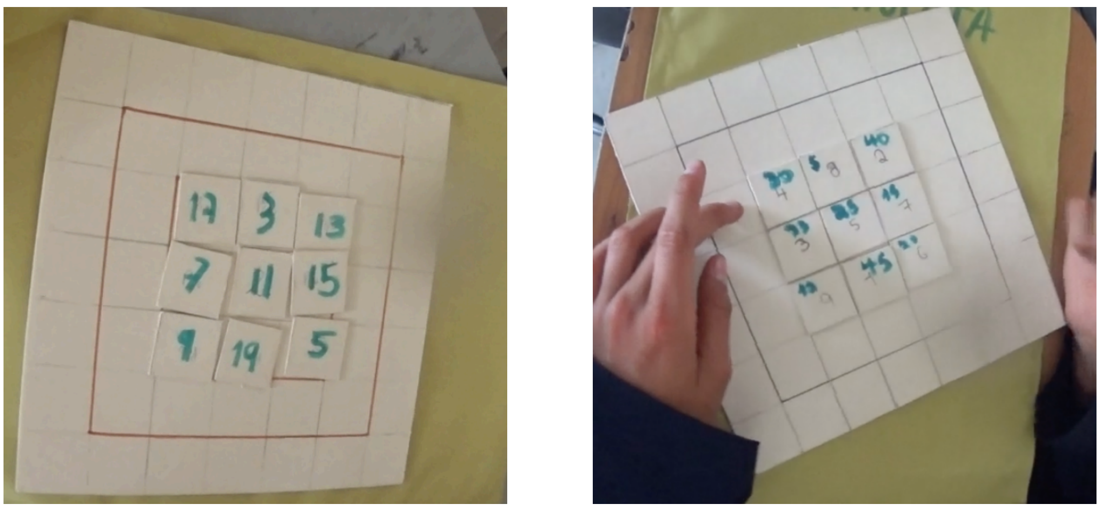


Figura 43. Dos ejemplos de cuadrados mágicos realizados con el material concreto.

En la construcción de los cuadrados mágicos, se evidenció que algunos estudiantes no recordaban, los mecanismos vistos en la actividad 1 para construirlos. Luego, tuvieron que recurrir a la prueba por ensayo y error para dar hallar la solución al problema. En este aspecto el material concreto fue de gran ayuda, puesto que era más cómodo para los estudiantes, corregir los intentos fallidos.

Finalmente los estudiantes, establecieron que no era posible construir un cuadrado mágico a partir de la sucesión geométrica $\{6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536\}$, o por lo menos, no bajo la definición que se estaba dando de cuadrado mágico. Así pues, un grupo de estudiantes conjeturó que "*para armar un cuadrado mágico con esto* (la sucesión geométrica)*, no sería que la suma de las diagonales, de las columnas y las filas me de lo mismo, si no la multiplicación*". Para mostrar esto, el docente propone su construcción, dándose el siguiente diálogo:

1. Docente: intentémoslo.
2. Estudiante F: (…) el de la mitad sería 96.
3. Docente: el de la mitad sería 96 ¿están de acuerdo todos?
4. Estudiantes en coro: si
5. Estudiante M: el 48 y el 192..

6. Docente: espere, espere, espere [el docente traza una cuadrícula cuadrada compuesta por 9 cuadrados y en la posición (2, 2) escribe e número 96]
7. Estudiante F: en las esquinas sería 48 y 192.
8. Docente: este ya lo ubicamos [encierra al número 96 con un círculo]
9. Estudiantes en coro: 48 y 192.. (…)
10. Docente: ¿dónde?
11. Estudiante F: la diagonal vea, usted ponga cuadro superior izquierdo..
12. Docente: aquí [señala a la posición (1, 1)]
13. Estudiante F: si, 48 y en la inferior derecha 192 [el docente escribe los números 48 en (1, 1) y 192 en (3, 3)]
14. Estudiante N: no, no eso no da, en la otra esquina.
15. Docente: ¿será que tu método funciona con estos? [el docente señala a las sucesiones aritméticas escritas en el tablero] (…) si quiero armarlo con este [señala a la sucesión $\{3, 2, 1, 0, -1, -2, -3, -4, -5\}$] ¿se puede o no?
16. Estudiantes L y F: si
17. Docente: miremos el método que él está intentando mostrarnos [traza otra cuadrícula con dimensiones idénticas a la anterior] él dice.. ¿cuál es el que pongo en la mitad?
18. Estudiante N: -1
19. Docente: -1 [escribe -1 en la posición (2, 2) de la segunda cuadrícula] ¿cuál pongo acá? [señala a la posición (1, 1)]
20. Estudiante F: 0 y -2.
21. Docente: y.. -2 [escribe -2 en la posición (3, 3)] (…) ¿cómo sigo?
22. Estudiante F: sáltate el 1 y el -3, entonces pones 2 en la otra esquina..
23. Estudiante L: y el -4.
24. Docente: el 2 acá y el -4 acá [escribe 2 en la posición (1, 3) y -4 en (3, 1)] ¿y luego?
25. Estudiante L: como cuadre.
26. Estudiante F: ella es la del método.
27. Estudiante L: es que así no puedo (…)
28. Docente: ¿cuánto da la suma?
29. Estudiante en coro: -3, (entonces cuádrelo)
30. Docente: miren los que ya tenemos [encierra en círculos a los números 2, 0, -1, -2, y -4 de la sucesión escrita en el tablero]
31. Estudiante E: entre los dos 2, va el -3 [el docente escribe -3 en (2, 3)]
32. Estudiante F: y en el otro lado va 1 [el docente escribe 1 en (2, 1) y luego señala a la posición (3, 2)]
33. Estudiante E: sería el 3 positivo.
34. Estudiante E y F: y en otro -5 [el docente escribe 3 en (2, 1) y -5 en (1, 2)]
35. Docente: ¿y esto es un cuadrado mágico?
36. Estudiantes en coro: claro [se escuchan murmullos de los estudiantes, al hacer cuentas y verificar que la suma de los términos que componen las diagonales, filas y columnas es -3]. Si da y aplica para todos.

En ese momento, el método descrito por los estudiantes L y F, se institucionaliza y se reconoce como un método que sirve, para construir cualquier cuadrado mágico de lado tres. Es decir, que se reconoce como una generalización aplicable a cuadrados mágicos de lado tres, que es expresada en el estrato *contextual*, por el uso de frases clave y apoyada por el señalamiento de las posiciones en la cuadrícula.

37. Estudiante F: y entonces sería el 12 allá, abajo.
38. Docente: el 12 aquí [señala a la posición (3, 1) de la primera cuadrícula].
39. Estudiante F: (…) si ahí [el docente escribe 12 en (3, 1)] y en el otro lado 768, allá [docente escribe 768 en (1, 3)] exacto, y.. ahora sería mirar a ver que.
40. Docente: ¿cuánto debería dar la multiplicación?
41. Estudiante N: (…) 8, 8, 4, 7, 3, 6.
42. Docente: ¿lo hallaste cómo?
43. Estudiante F: multiplicando las diagonales.
44. Docente: 12 por 96 por 768.
45. Estudiante L: la multiplicación de la diagonal si da eso.
46. Docente: ¿y la otra diagonal? [señala a los números 48, 96y 192].
47. Estudiante F: esa fue la que comprobé.
48. Estudiante L: sí.. las 2 diagonales dan igual.
49. Docente: ¿seguro? podría ser algo interesante lo que acabamos de encontrar.
50. Estudiante F: espere, ahora multiplique 48 por 12 y eso, lo que nos de eso divide a..
51. Docente: o sea, 884736 dividido lo que nos de 48 por 12, y lo que nos de ahí lo ponemos acá [señala a la posición (2, 1)] ¿cuánto nos da? Ese número tiene que ser uno de estos [señala a la sucesión geométrica] porque si no.., se daña.
52. Estudiante E: profe debajo de 768 va el 6.
53. Docente: seguro ya.. ¿cómo supiste que ahí va el 6?
54. Estudiante E: porque multiplique 768 por 192.
55. Docente: o sea aquí pongo el 6, de una [escribe 6 en (2, 3)].
56. Estudiante L: y al otro lado el 1536 [docente escribe 1536 en (2, 1)]
57. Docente: (…) ¿y ahora?
58. Estudiante M: el 384 va abajo [el docente escribe 384 en (3, 2)] y 24 arriba [el docente escribe 24 en (1, 2)]
59. Docente: miremos.., ¿eso así funciona o no?
60. Estudiantes en coro: claro, ahí da.
61. Docente: esto está muy interesante, es cuadrado mágico no con la suma, sino con la multiplicación.
62. Estudiante S: (o sea que la que yo puse sí..)
63. Docente: o sea que si se puede armar un cuadrado mágico con la que usted puso [el docente señala al estudiante S], pero un cuadrado mágico definido de otra manera. Muy chévere, felicitaciones.

A continuación se presenta la Figura 44, que corresponde al cuadrado mágico, construido a partir de la sucesión geométrica $\{6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536\}$:

48	24	768
1536	96	6
12	384	192

Figura 44. Cuadrado mágico, cuyo producto de los términos de las diagonales, columnas y filas es constante.

Conclusión: El método de construcción utilizado por los estudiantes, en la socialización de la actividad, corresponde a una generalización expresada en el estrato *contextual*. Las etapas *ver, decir, registrar* patrones y *probar* la validez de las fórmulas son evidentes en la construcción colectiva de los cuadrados mágicos descrita en el análisis de la pregunta. La utilización de sucesiones geométricas para construir cuadrados mágicos, amplia su definición, y esto resulta ser relevante en el acercamiento de los estudiantes al que hacer de un matemático.

4.2.3. Actividad 3

Fecha: 22 y 29 de septiembre de 2015

Número de estudiantes: 11 (septiembre 22) y 14 (septiembre 29)

Objetivos:
- Reconocer patrones de construcción de cuadrados mágicos referentes al método hindú.
- Generar situaciones que conlleven a la representación simbólica de la generalidad.

La actividad se desarrolló en dos sesiones de clase; en la primera se hizo un reconocimiento grupal de algunos patrones relacionados con el método hindú, con el fin de que los estudiantes determinaran por sí mismos dicho método y posterior a ello se propuso el desarrollo parcial de la guía de estudio conformada por tres preguntas. En la segunda sesión, se pidió a los estudiantes terminar con el desarrollo de la guía, para finalizar así, con la socialización del trabajo llevado a cabo en las dos sesiones.

Para dar inicio a la actividad, el docente entrega una guía en la que se presentan algunos cuadrados mágicos construidos por el método hindú, junto con las listas de números que los conforman y sus cifras mágicas correspondientes. De acuerdo a esto, el docente pide a los estudiantes, que cada uno formule por lo menos una proposición que sea válida para todos los casos. Esto lo acompaña con dos ejemplos:

Proposición 1: El primer número de la lista siempre se ubica en el centro de la primera fila.
Proposición 2: El segundo número de la lista siempre se ubica en la última columna.

El docente indica que la primera proposición puede escribirse en el tablero, puesto que es válida para todos los cuadrados mágicos que se presentan en la guía, mientras que la segunda proposición sólo se cumple para los cuadrados mágicos de lado tres y por ende no podría escribirse en el tablero. De este ejercicio en colectivo surgen las siguientes proposiciones:

Prop. 1. El primer número de la lista se encuentra en el centro de la primera fila.
Prop. 2. La secuencia sube en diagonal hacia la derecha.
Prop. 3. El número de la mitad de la lista se encuentra en el centro del cuadrado.
Prop. 4. Los términos en la diagonal (secundaria) hacia la derecha del número central del cuadrado, son los que le continúan en la lista.

Prop. 5. Los términos en la diagonal (secundaria) hacia la izquierda del número central son los que le anteceden en la lista.
Prop. 6. Debajo de la diagonal (secundaria) se encuentran términos consecutivos de la secuencia.
Prop. 7. Existen parejas de números cuya suma es constante "opuestos al centro del cuadrado"
Prop. 8. El último número de la lista está en la última fila y en la columna del centro.
Prop. 9. Los dos primeros términos de la última columna, son consecutivos en la lista.
Prop. 10. El segundo número de la lista se encuentra en la última fila.
Prop. 11. Los últimos números de la primera columna, son consecutivos respecto a la lista.
Prop. 12. El número de la mitad multiplicado por la cantidad de filas da la cifra mágica.
Prop. 13. Existen tríos de números consecutivos en lista que forman L en el cuadrado mágico.

Conclusión: cada una de las proposiciones anteriores, resulta ser una generalización que se expresa de acuerdo estrato *contextual*, en el que se identifica la característica común, además se verifica con los cuadrados, listas numéricas y cifras mágicas presentadas en la guía.

Resultado pregunta 1.

Pregunta 1. De acuerdo a los cuadrados mágicos presentados previamente:

a. ¿De qué otra manera se puede determinar la cifra mágica de cualquier cuadrado sin realizar la suma?
b. Construye 25 fichas y márcalas con los números de la lista que se presenta a continuación, y con ayuda del material, ubica las fichas en la cuadrícula, de tal forma que obtengas un cuadrado mágico. Lista: {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65, 68, 71, 74}
c. Determina el valor de la cifra mágica del cuadrado que construiste.
d. Explica paso a paso la forma en que construiste el cuadrado mágico.

En el proceso de acercamiento a la construcción de cuadrados mágicos, que se realizó al iniciar la actividad, surgió la respuesta al literal a., que corresponde a la proposición 12. La cual indica que la cifra mágica puede hallarse, multiplicando el número de la mitad de la lista (o centro del cuadrado mágico) por el lado del cuadrado mágico.

Distinto a lo que se esperaba en el literal b., los estudiantes no construyeron las 25 fichas que serían marcadas con los números {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65, 68, 71, 74}, ellos prefirieron escribir sobre la cuadrícula que se presentaba en la guía. Esto posiblemente ocurrió, porque los estudiantes reconocían la existencia de un método para dar la solución. Adicionalmente ocho estudiantes determinaron que el valor de la cifra mágica es 190, dando con ello respuesta al literal c.

50	71	2	23	44
68	14	20	41	47
11	17	38	59	65
29	35	56	62	8
32	53	74	5	26

Lista: {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65, 68, 71, 74}

Cifra mágica:
$38 \times 5 = 190$

Figura 45. Cuadrado mágico de lado cinco, construido por el método hindú.

La Figura 45 muestra el cuadrado mágico de acuerdo a la lista propuesta en la pregunta, construido por un estudiante.

Se resalta que los catorce estudiantes del curso, construyeron el cuadrado mágico, básicamente por dos métodos: el método hindú y la copia de las posiciones de los números de la lista, de acuerdo a un cuadrado mágico conocido. Tales, métodos se describen a continuación respondiendo al literal d.

Una estudiante describió los pasos para construir cuadrados mágicos de lado impar, correspondientes al método hindú, a través de la interacción con el docente durante el desarrollo de la guía. La estudiante utilizó la información presentada en el ejemplo 5 de la guía (Figura 46) para determinar dicho método:

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Lista: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49}

Cifra mágica: 175

Figura 46. Quinto ejemplo presentado en la guía propuesta a los estudiantes.

Esto se registró en video, del cual a continuación se muestra su transcripción:

1. Estudiante V: te acuerdas que acá seguía la secuencia [señala los números en el cuadrado mágico del cuadro 2] el 22, 23, 24, 25, hasta el 28.
2. Docente: sí.

3. Estudiante V: entonces acá se encuentra otra secuencia [señala los números en el cuadrado mágico del cuadro 2] 31, 32, 33, 34, 35.. 40, 41, 42..
4. Docente: sí.
5. Estudiante F: 43, 44, 45
6. Estudiante V: 2, 3, 4.. 11 y 12 [la estudiante señala los números en el cuadrado mágico del cuadro 2] ¡ahí, que carajo! ¡encontramos algo, profe, profe! ¡ush..! ¡hu...! Profe mira [señala repitiendo los números 31, 32, 33, 34, 35.. 40, 41, 42.. 43, 44, 45.. 2, 3, 4.. 11, 12]
7. Docente: ¿qué puedes sacar de ahí? De esas diagonales como raras que me estas mostrando.
8. Estudiante V: eso tiene que ver con la respuesta.
9. Estudiante L: ¡sí!
10. Docente: tiene que ver mucho con la respuesta, bueno si ustedes hicieran, siempre lo mismo. Que el siguiente va así [el docente mueve el dedo índice, de abajo hacia arriba y luego a la derecha]
11. Estudiante V: pero no sabemos cuál, digamos a este [señala el número 42 del cuadrado mágico]
12. Docente: Pero acá [el docente señala a la lista del ejemplo mostrado en el cuadro 2] tu si sabes cuál es el que le sigue. Por ejemplo 1 y 2. Cierto [estudiante V asiente con la cabeza] [el docente señala al número 1 del cuadrado mágico] si yo hiciera lo mismo en diagonal ¿dónde iría el 2 acá? Haciendo la diagonal.
13. Estudiante V: ¿acá? [señala con el lápiz el espacio que va sobre el número 10, del cuadrado mágico]
14. Docente: acá afuera ¿cierto? [señala en el espacio fuera del cuadrado mágico, afuera del cuadrado mágico] mira donde quedo.
15. Estudiante F: aquí [señala con el dedo una vertical, desde la posición encima del número 10 hasta el número 2 del cuadrado mágico]
16. Docente: ¿y si sigo haciendo la diagonal? [señala el número 2 del cuadrado mágico] 2, 3, 4 ¿dónde iría el 5?
17. Estudiante V: aquí [señala el espacio por fuera del cuadrado mágico, a la derecha de 45]
18. Docente: y paso allá [señala al número 5 del cuadrado mágico]
19. Estudiante V: (…) ¡ya entendí!
20. Docente: ¿hallaste algo? ¿qué hallaste?
21. Estudiante V: el 2 iría acá ¿verdad? [señala al espacio que queda encima del número 10] entonces se pasa al último. 2, 3, el tres no tiene problema, 4, el cuatro tiene problema, se pasa aquí [señala el espacio que se encuentra a la derecha de 45], entonces se pasa acá [señala al número 5 del cuadrado mágico], el 5, el 6, el 7 tampoco, ¡ah! ¿Y el 8?
22. Docente: mira que ocurre con el 8.
23. Estudiante V: abajo, ¿y por qué?
24. Docente: abajo
25. Estudiante F: 8, 9 y 10 [señalando los números en el cuadrado mágico]
26. Estudiante V: 10 y 11 aquí [señala el espacio por fuera del cuadrado mágico, sobre el número 19. Sigue la columna desde 19 hasta el número 11] ¡aquí!, y se repite 12, 13 que pasa aquí [hace una horizontal desde el 4 hasta el 13 del cuadrado mágico] y luego 14 y 15 ¡ah..! Esa es la respuesta ¡profe hallamos la respuesta!

27. Docente: ¿cómo es? ¿cómo es?

La estudiante señala uno a uno los números de 1 a 28, haciendo énfasis en el movimiento diagonal (una casilla arriba y una a la derecha) para ubicar los números en el cuadrado mágico, la ubicación de los números en la casilla opuesta al espacio donde se sale el número del cuadrado (si *se sale* por la parte superior del cuadrado, se ubica en la última por la misma columna o si *se sale* por la parte derecha del cuadrado, se ubica en la primera columna, conservando la fila) y la ubicación en la casilla inferior, cuando la casilla donde se pretendía ubicar un término estaba *ocupada*.

28. Docente: ¿29 donde quedaría, si me saliera ahí? [señala el espacio por fuera del cuadrado en diagonal al número 28]
29. Estudiante V: no sé, pero ¿si no?
30. Docente: mira el resto a ver si se aplica a todos y encontraste algo muy interesante.

Así pues, la estudiante repasa los pasos enunciados anteriormente en el primer ejemplo que se presenta en la guía (Figura 47).

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Lista: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Cifra mágica: 15

Figura 47. Primer ejemplo presentado en la guía propuesta a los estudiantes.

Señala uno a uno los números de 1 a 6, y en el proceso encierra a tales números con un círculo, con el objetivo de marcar los números de la lista que va usando en la construcción.

31. Estudiante V: si me salgo allá [señala al espacio por fuera del cuadrado en diagonal a la esquina superior derecha] entonces baja.
32. Docente: ¿y siempre baja?
33. Estudiante V: ¡ah! Si se pasa de las esquinas entonces se baja [señala a la casilla correspondiente a la segunda fila y última columna del cuadrado mágico presentado en el cuadro 3.] 8 y 9.

La estudiante luego de describir los pasos, los prueba al hacer un repaso de los números que componen el tercer cuadrado mágico, presentado en la guía como ejemplo y al construir y verificar (con calculadora) el cuadrado mágico de la pregunta correspondiente a la Figura 45. Esto corresponde a la etapa *prueba de la fórmula* que describen Mason, et al (1985). Además, los gestos y señalamientos que realiza en la descripción del método, caracterizan su *estrato factual* para la expresión de la generalidad.

Un estudiante utilizó un cuadrado mágico conocido y copió las posiciones de los números de la lista que lo componen, para dar respuesta a la pregunta. Este método se deriva del mecanismo que utilizó en la construcción de cuadrados mágicos de lado tres, el cuál fue un problema formulado en la actividad 1 de la propuesta didáctica. La descripción que hace el estudiante del método se presenta a continuación (Figura 48).

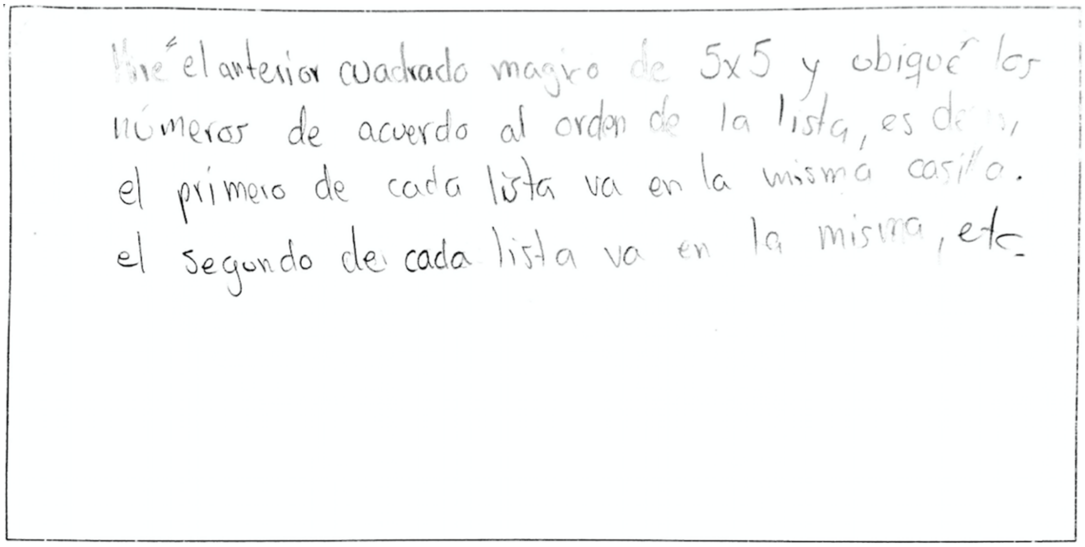

Miré el anterior cuadrado magico de 5x5 y obiqué los números de acuerdo al orden de la lista, es de[illegible], el primero de cada lista va en la misma casilla. el segundo de cada lista va en la misma, etc.

Figura 48. Copia de las posiciones de los números de la lista, de acuerdo a un cuadrado mágico conocido.

Resultado pregunta 2.

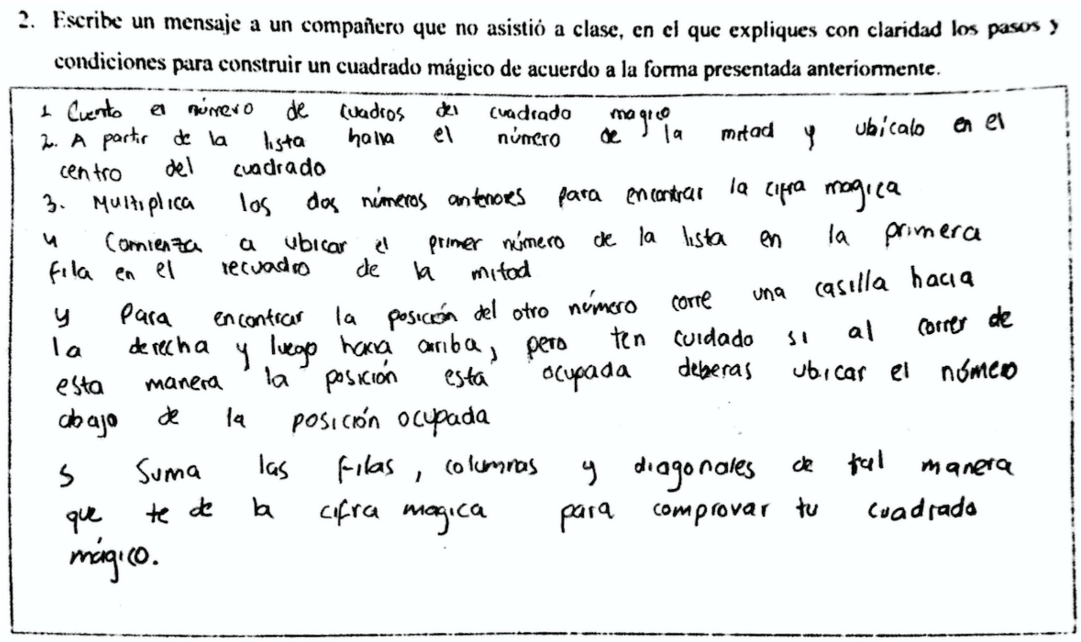
> Pregunta 2. Escribe un mensaje a un compañero que no asistió a clase, en el que expliques con claridad los pasos y condiciones para construir un cuadrado mágico de acuerdo a la forma presentada anteriormente.

Con esta pregunta se pretendía que los estudiantes describieran de forma general el método hindú.

De las respuestas dadas por los estudiantes, destaca la ausencia de la condición relacionada con el tamaño del cuadrado, el cuál debe ser de lado impar, que es necesaria para la construcción de los cuadrados mágicos por el método hindú. Dos estudiantes enunciaron el método particular, para construir el cuadrado presentado en el primer punto, sin enunciar un conjunto de pasos que se ajustaran a la construcción de cualquier cuadrado mágico de lado impar. Cinco estudiantes, no respondieron en forma escrita a la pregunta y los siete restantes formularon elementos característicos de un método de construcción para cualquier cuadrado mágico (de lado impar).

Estos últimos sugieren un estrato *contextual*, de la expresión de la generalidad, puesto que enuncian la construcción a través del lenguaje natural, con frases como las expuestas en la Figura 49, que corresponde a la respuesta dada por una estudiante sobre el método de construcción.

Los pasos que describe la estudiante, se acercan mucho al método hindú, sólo hace falta la descripción de donde ubicar un número, si este *se sale* del cuadrado mágico. Adicionalmente en la Figura 49 se resalta, que la estudiante propone el método para calcular la cifra mágica, conociendo el lado y el número correspondiente a la mediana de lista y la comprobación del cuadrado obtenido, a través del cálculo de la suma de cada fila, columna y diagonal, lo cual indica una *validación de las fórmulas*.



2. Escribe un mensaje a un compañero que no asistió a clase, en el que expliques con claridad los pasos y condiciones para construir un cuadrado mágico de acuerdo a la forma presentada anteriormente.

1 Cuenta el número de cuadros del cuadrado magico
2. A partir de la lista halla el número de la mitad y ubícalo en el centro del cuadrado
3. Multiplica los dos números anteriores para encontrar la cifra magica
4 Comienza a ubicar el primer número de la lista en la primera fila en el recuadro de la mitad
y para encontrar la posición del otro número corre una casilla hacia la derecha y luego hacia arriba, pero ten cuidado si al correr de esta manera la posición esta ocupada deberas ubicar el número abajo de la posición ocupada
5 Suma las filas, columnas y diagonales de tal manera que te de la cifra magica para comprovar tu cuadrado mágico.

Figura 49. Pasos para construir un cuadrado mágico, próximos al método hindú.

Al inicio de la segunda sesión de la actividad (septiembre 29), se propuso a los estudiantes formar grupos con el objetivo, de que ellos dialogaran acerca de los métodos utilizados, en la construcción del cuadrado mágico formulado en el primer punto de la guía. Con esto llegaron a la conclusión de que el método más eficaz (en lo que a tiempo se refiere) para construirlo, era el hindú, logrando que la totalidad de los estudiantes, reconocieran los pasos que lo conforman. Esto se hizo evidente en la socialización de la actividad, donde se propuso que cada estudiante del curso, ubicara un número de una sucesión aritmética cuyo primer término es 0 y diferencia común -1, en una cuadrícula de lado 5 dibujada en el tablero. Cada estudiante del curso, ubico el número que le correspondía de forma exitosa, obteniendo el cuadrado de la izquierda de la Figura 50.

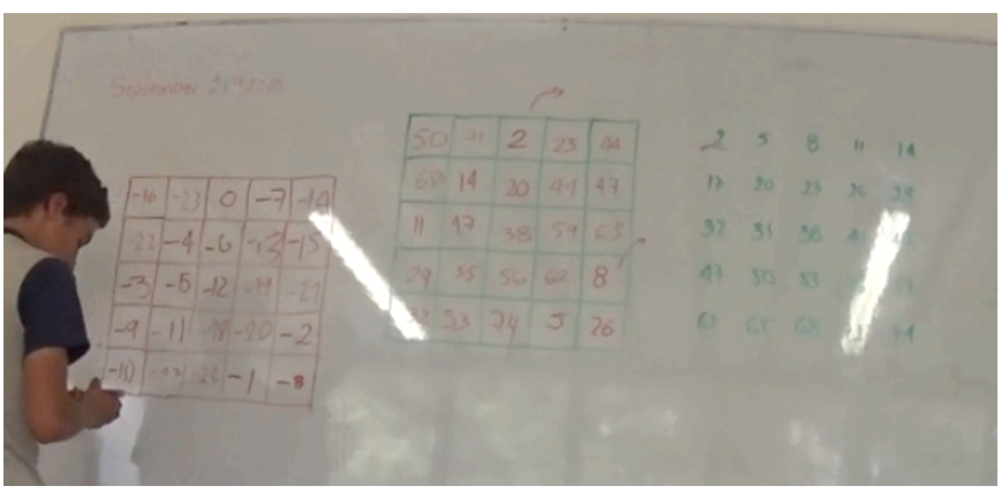


Figura 50. Cuadrados mágicos resueltos durante la etapa de socialización de la actividad.

Conclusión: La formulación de la pregunta acompañada del trabajo en grupo, permitió que los estudiantes compartieran sus ideas respecto a los patrones que habían reconocido, y ello llevo a la caracterización de un método aplicable a la construcción de cualquier cuadrado mágico de lado impar. Esto resulta ser una generalización, que fue expresada por los estudiantes en el estrato *contextual*.

Resultado pregunta 3.

Pregunta 3. Mete las 25 fichas que acabas de construir en una bolsa, saca una al azar sin mirarla y métela en un sobre. Además sin revelar la lista, en el sobre incluye las instrucciones, para que cualquier persona pueda identificar la posición del número en la lista.

Esta pregunta fue adaptada de Vergel (2014, p. 95), y buscaba generar un medio, en el que fuese pertinente (de forma natural) el uso de un lenguaje simbólico, en la expresión de la generalidad.

Sin embargo, en la práctica generó confusión en los estudiantes, quienes manifestaron que no era claro lo que se pedía, requirió de una explicación personalizada de lo que el enunciado pretendía, sin obtener los resultados esperados. Esto se pone en evidencia en la siguiente transcripción de un fragmento del video correspondiente a la socialización de este punto de la actividad.

1. Docente: ¿cuáles fueron tus instrucciones?
2. Estudiante M: identifica el número.
3. Docente: identifica el número. Listo tal, ya lo identifique.
4. Estudiante M: segundo.. [el docente escribe la primera instrucción en el tablero] la lista consta de 25 números.
5. Docente: [escribiendo en el tablero] la lista tiene 25 números.
6. Estudiante L: empieza por el 2 y termina en el 74.
7. Docente: [escribiendo en el tablero] inicia en el 2 y termina en 74. Listo ¿qué más?
8. Estudiante L: asciende de 3 en 3.
9. Docente: asciende de 3 en 3.
10. Estudiante L: o sea aumenta en 3 números, digamos del 2 al 5, o sea la secuencia es de tres en tres.
11. Docente: [escribiendo en el tablero] tercero la secuencia es de 3 en 3. Listo
12. Estudiante N: aumenta en 3 [el docente escribe en el tablero "(aumenta en 3)"]
13. Docente: ya, ¿qué más? (…)
14. Docente: digamos me salió 8, lo identifique. Voy a hacer lo que dice acá [señala los pasos enunciados por los estudiantes] lo identifique, ya es 8. La lista tiene 25 números, comienza en 2 y termina en 74. La secuencia es de 3 en 3. ¿Cómo hago para identificar ahí?
15. Estudiante N: tiene que hacer la lista.
16. Docente: tengo que hacer la lista y después..
17. Estudiante N: ubique el número.
18. Docente: [escribiendo en el tablero] cuarto, ubique el número. Esta acá [subraya al número 8 de la lista]

19. Estudiante L: y ya.
20. Docente: pero ¿esto responde a la pregunta?, la pregunta es la posición. ¿alguien lo hizo de otra manera?, bueno pues pregunto ¿será que esto responde a la pregunta? ¿qué es lo que uno debería responder?, yo como lector de las instrucciones que están en el sobre, debería ser capaz de decir está en la posición 3. Eso es lo que yo debería poder decir. ¿con esto tal cual esta, puedo decir está en la posición 3? [señalando a las instrucciones escritas en el tablero] ¿alguien lo hizo de otra manera? Ustedes muchachos que ya lo hicieron [el docente señala a un grupo] ¿cómo lo hicieron?
21. Estudiante M: así, igualito.
22. Docente: ¿igualito? (…) ¿y ustedes? [señalando a otro grupo de estudiantes]
23. Estudiante F: construya la lista.
24. Docente: construya la lista. O sea la persona tiene que armar toda la lista.. ¿y después contar?
25. Estudiante F: si.

Conclusión: el método descrito por los estudiantes responde a la pregunta, dando pistas al lector de las instrucciones, para replicar la lista de números y después indicarle que debe contar las posiciones hasta el número que esté escrito en la ficha. Sin embargo, (probablemente por la manera en que se formuló la pregunta) los estudiantes no vieron la necesidad de utilizar el lenguaje simbólico y por lo tanto se concluye que la pregunta no es pertinente para la propuesta didáctica.

4.2.4. Actividad 4

Fecha: 13 y 27 de octubre de 2015

Número de estudiantes: 9 (octubre 13) y 10 (octubre 27)

Objetivos:
- Propiciar el uso de la representación simbólica de una sucesión aritmética.
- Propiciar la representación simbólica un cuadrado mágico de lado tres.
- Abordar de forma exploratoria posibles operaciones con los cuadrados mágicos.

La actividad se llevó a cabo en dos sesiones de clase; en la primera se propuso el desarrollo de una guía orientada al uso de la representación simbólica de la generalidad, basada en una estrategia para reducir los recursos semióticos, en búsqueda de lo que Radford denomina *contracción semiótica*. En la segunda sesión, se propuso a los estudiantes exponer sus métodos para crear nuevos cuadrados mágicos a partir de dos cuadrados mágicos, un cuadrado mágico, y un cuadrado mágico y un número.

Resultado pregunta 1.

Pregunta 1. Representa los enunciados de una manera más corta, teniendo en cuenta que se relacionan con una secuencia, que puede usarse en la construcción de **CUALQUIER** cuadrado mágico de lado tres, con el método hindú.

En la formulación de la pregunta se definen además, los términos sucesión aritmética y geométrica, de acuerdo a la caracterización de las secuencias dada por los estudiantes a lo largo del taller.

Al inicio de la primera sesión de la actividad, el docente hizo la lectura en voz alta de la primera pregunta, formulada en la guía de trabajo propuesta a los estudiantes, haciendo énfasis en que la sucesión aritmética, podía usarse en la construcción de cualquier cuadrado mágico. A continuación se presenta un fragmento del registro de video de la sesión de clase, en el que se muestra el diálogo que originó, el uso de la representación simbólica de la sucesión aritmética y del cuadrado mágico de lado tres correspondiente.

1. Docente: el primer término de la sucesión aritmética. Escriba eso de una manera cortica, represéntelo de una manera pequeña. (…) el primer término, ¡ojo! Este debe servir para cualquiera. [los estudiantes seguían en silencio] ¿Qué se pretende con esta guía?, que ustedes usen una representación simbólica de la sucesión, que encuentren una representación simbólica de la sucesión. ¿Listo?
2. Estudiante F: ¿Estás diciendo que le pongamos un valor a la casilla? 1 por ejemplo.
3. Docente: no, porque si le pongo 1, únicamente me va a servir para las que empiezan con 1.
4. Estudiante F: entonces una variable.
5. Estudiante N: que empiece por una letra.
6. Docente: ¿cómo cuál?
7. Estudiante F: con J.
8. Docente: con J, listo. Entonces el primer término de tu sucesión ¿cuál sería?
9. Estudiante F: J.
10. Docente: Claro en ese caso tu J representa cualquier número, bueno ¿si es claro?
11. Estudiante N: no.
12. Docente: no, ¿cómo lo hacemos? (…)
13. Docente: En eso creo ustedes son más hábiles que incluso yo, ¿cuál es el problema?, el problema que deben solucionar es, que tienen un texto, ¿cierto?, (…) el primer término de una sucesión aritmética, ¿cómo lo escriben ustedes de una forma resumida?, es el primer término de una sucesión aritmética pero esa sucesión es cualquiera.
14. Estudiante F: una variable.
15. Docente: tu lo dices [señalando al estudiante F] y escoges cuál ¿si me hago entender? Y con base en eso que resuelvan ahí, van a empezar a responder las siguientes. Intenten pensar en eso y le dan sentido. (…) No hay una respuesta errada, sólo puede ser que sea menos óptima (…) inténtenlo.

Luego de lo anterior el docente dio un tiempo, para que los estudiantes respondieran a la pregunta y se dirigió hacia algunos, con el fin de resolver de forma personal, las dudas que aún tenían sobre el cómo responder la pregunta. Así pues en la siguiente transcripción, se muestra una de las preguntas formuladas por una estudiante, relacionadas con la representación simbólica.

1. Estudiante L: ¿acá se llama a la constante? [señalando al enunciado b) (El valor que se suma de forma constante, para obtener los términos de la sucesión) en el cuál la estudiante escribió la letra i].
2. Docente: ¡ah! En ese caso los dos primeros serían variables, o sea todo debería ser una variable, cada cosita, cada término varía. Pero varía dependiendo de estos dos.
3. Estudiante L: de estas dos letras.
4. Docente: claro.. con base en esas dos. Claro, primero tú dices que es p, y el otro dices que se llama i [señalando a los literales a) y b) del primer punto de la guía] (…) entonces el primer término es p, siempre le voy a sumar i, ¿entonces el segundo cómo es?
5. Estudiante L: $p + i$.
6. Docente: ¡ah listo!
7. Estudiante L: [señalando al literal d)] $p + i + i$.
8. Docente: y entonces si es $p + i + i$, ¿cuánto me daría?, realmente ¿qué sería $p + i + i$? [estudiante L, ríe], $p + i + i$ se puede hacer, ¿cuánto da?
9. Estudiante L: ¿pi^2?
10. Estudiante R: $2i + p$.
11. Estudiante L: ¡ah, sí, sí!
12. Docente: si estuvieses multiplicando si daría pi^2.

A continuación se presenta la Figura 51, correspondiente a una de las respuestas dada por un estudiante. Se resalta que el total de los estudiantes respondió de forma similar

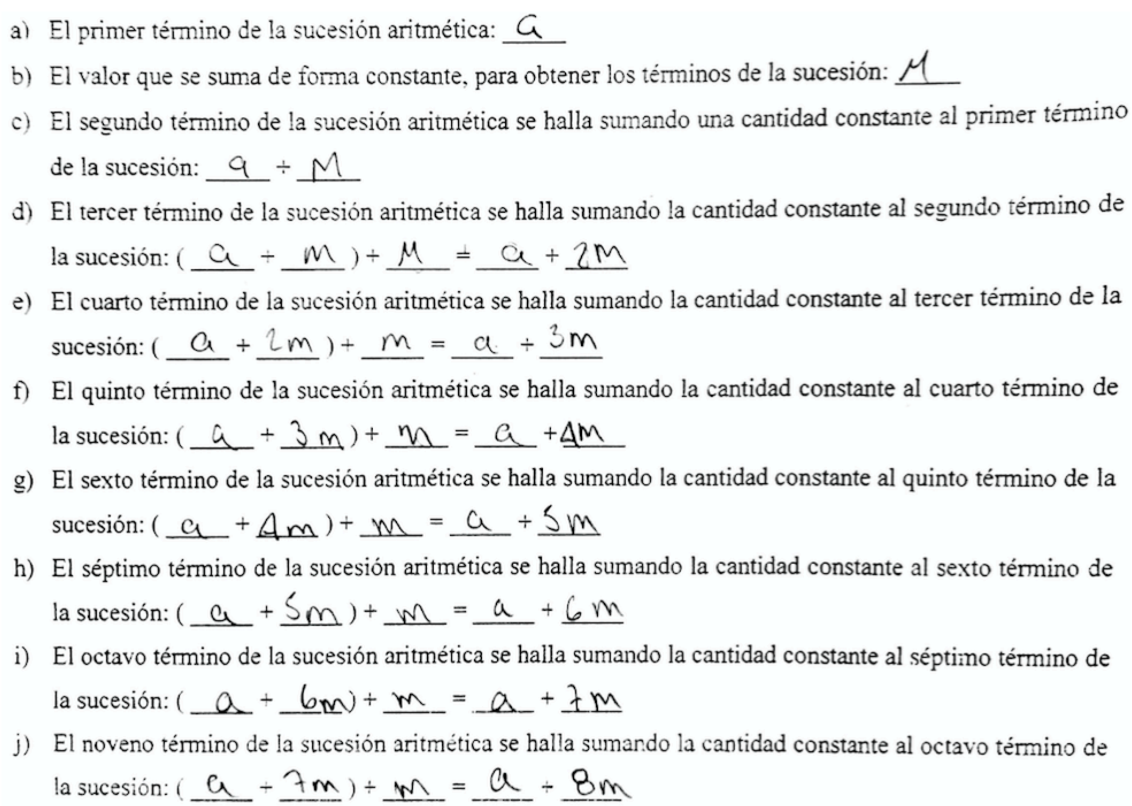

a) El primer término de la sucesión aritmética: a
b) El valor que se suma de forma constante, para obtener los términos de la sucesión: M
c) El segundo término de la sucesión aritmética se halla sumando una cantidad constante al primer término de la sucesión: a + M
d) El tercer término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al segundo término de la sucesión: (a + m) + M = a + 2M
e) El cuarto término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al tercer término de la sucesión: (a + 2m) + m = a + 3m
f) El quinto término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al cuarto término de la sucesión: (a + 3m) + m = a + 4M
g) El sexto término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al quinto término de la sucesión: (a + 4m) + m = a + 5m
h) El séptimo término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al sexto término de la sucesión: (a + 5m) + m = a + 6m
i) El octavo término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al séptimo término de la sucesión: (a + 6m) + m = a + 7m
j) El noveno término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al octavo término de la sucesión: (a + 7m) + m = a + 8m

Figura 51. Representación simbólica de una sucesión aritmética, dada por un estudiante del taller.

Dos de los estudiantes presentes en la sesión de clase, tuvieron dificultades para resolver el literal d) (el tercer término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al primer término de la sucesión: (___ + ___) + ___ = ___ + ___), puesto que sumaban tres variables distintas al lado izquierdo de la igualdad, lo cuál sugería que no habían dotado de significado a las dos primeras variables que utilizaron. Al entrevistarlos, se dedujo que los estudiantes reconocían la manera en que se generan los términos de una sucesión aritmética, y al cuestionarlos sobre lo que representaban las letras, ellos mismos concluyeron que resultaba incorrecto proponer la suma de tres variables distintas.

A continuación se presenta la transcripción del video de socialización de las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta analizada.

1. Docente: [hace la lectura de la pregunta y se dirige a un estudiante] ¿el primer término de la sucesión aritmética?
2. Estudiante L: x
3. Docente: tú dijiste que es x. (…) [escribe en el tablero $1^o \rightarrow x$], para poder construir las sucesiones aritméticas necesito lo que les voy a sumar, lo que voy a sumar de forma recurrente. ¿Tú que sumaste de forma recurrente? [señala a un estudiante].
4. Estudiante F: c.
5. Docente: le sumabas c, entonces siempre le voy a sumar c, ¿el segundo término de la sucesión aritmética, entonces quien va a ser?
6. Estudiante R: $x + c$.
7. Docente: $x + c$ [escribe en el tablero $2^o \rightarrow x + c$], ¿están todos de acuerdo?, ¿quién tiene algo diferente, salvo las letras? (…) ¿no? ¿todos usaron letras? ¿por qué usaron letras?
8. Estudiante E: los números desconocidos se simbolizan con letras.
9. Estudiante R: las variables.
10. Docente: ¡ah!, las variables se representan con letras, mmm, eso es una buena pregunta acá, [señala el símbolo x que representa el primer término de la sucesión], ¿esto es un número desconocido o una variable? ¿cuál será la diferencia entre esas dos vainas?
11. Estudiante F: es un número que no conocemos, pero si lo conocemos..
12. Docente: ¿dónde aparecen las incógnitas y donde aparecen las variables?
13. Estudiante R: ¿las incógnitas?
14. Docente: si las incógnitas, los números desconocidos.
15. Estudiante L: la variable es que varía.
16. Docente: la variable es que varía, cambia, puede ser cualquiera, ¿y las incógnitas?
17. Estudiante F: es un número que ya nos dan, pero que no sabemos cuál es.
18. Docente: es un número que debemos hallar, que no sabemos cuál es, ¿si se dan cuenta que hay una diferencia entre las dos cosas?
19. Estudiante R: entonces x sería un n*úmero.*
20. Estudiante L: variable.
21. Docente: me voy a meter un poquito en la clase de algebra, si yo tengo esto [escribe en el tablero $7 + x = 12$] $7 + x = 12$, ¿la x es una variable o una incógnita?
22. Estudiante L: es una incógnita.
23. Estudiante R: si, es una incógnita.

24. Docente: [señala la x, que representa el primer término de la sucesión] ¿y en este caso tengo algo así?
25. Estudiantes en coro: no.
26. Estudiante E: es una variable.
27. Docente: listo.

Continuando con la etapa de socialización, el docente pregunta a distintos estudiantes del curso, sobre cada uno de los términos faltantes de la sucesión aritmética, obteniendo en el tablero la Figura 52.

$$\begin{array}{lcl} 1^o & \rightarrow & x \\ 2^o & \rightarrow & x+c \\ 3^o & \rightarrow & x+2c \\ 4^o & \rightarrow & x+3c \\ 5^o & \rightarrow & x+4c \\ 6^o & \rightarrow & x+5c \\ 7^o & \rightarrow & x+6c \\ 8^o & \rightarrow & x+7c \\ 9^o & \rightarrow & x+8c \end{array}$$

Figura 52. Representación simbólica de los términos de una sucesión aritmética, formulada por el conjunto de estudiantes.

Durante la formulación de la representación del tercer término de la sucesión presentada en el cuadro 4, el docente pregunto la razón del por qué aparece el término $2c$, a lo cuál los estudiantes respondieron en coro, que se debía a sumar dos veces c, al primer término (x). Ello muestra que los estudiantes, dotaron de significado a las letras utilizadas en la solución del problema.

Conclusión: El uso de la representación simbólica de la sucesión aritmética, no se dio de forma natural en el desarrollo del taller. La situación que se formuló para ello, generó conflicto en los estudiantes, que no comprendían claramente la necesidad de escribir en forma resumida, cada uno de los términos de la sucesión aritmética general. Sin embargo, después de la interacción con el docente, los estudiantes dieron sentido a la pretensión de "economía en el lenguaje" y dotaron de significado a las variables utilizadas para representar los términos de la sucesión. Así pues la totalidad de los estudiantes presentes en la sesión, alcanzó el estrato *simbólico* de la generalidad, el cual hasta ese momento se había presentado en muy pocas oportunidades.

Resultado pregunta 2.

Pregunta 2. Construye el cuadrado mágico con los términos de la sucesión aritmética representados anteriormente, a través del método hindú, en la cuadrícula y verifica que la suma de los términos de cada columna, fila y diagonal es constante.

La pregunta se propuso a los estudiantes, con el objetivo de que estos representaran de forma simbólica, cualquier cuadrado mágico de lado tres construido por el método hindú. Además se pide una verificación de la cifra mágica, para validar el método hindú.

2. Construye el cuadrado mágico con los términos de la sucesión aritmética representados anteriormente, a través del método hindú, en la cuadrícula y verifica que la suma de los términos de cada columna, fila y diagonal es constante:

7M + L	L	5M + L
2M + L	4M + L	6M + L
3M + L	8M + L	M + L

Fila 1: (7M + L + L + 5M + L) = 12M + 3L

Fila 2: (2M + L + 4M + L + 6M + L) = 12M + 3L

Fila 3: (3M + L + 8M + L + M + L) = 12M + 3L

Columna 1: (7M + L + 2M + L + 3M + L) = 12M + 3L

Columna 2: (L + 4M + L + 8M + L) = 12M + 3L

Columna 3: (5M + L + 6M + L + M + L) = 12M + 3L

Diagonal 1: (7M + L + 4M + L + M + L) = 12M + 3L

Diagonal 2: (5M + L + 4M + L + 3M + L) = 12M + 3L

Figura 53. Cuadrado mágico general de lado tres y verificación del método.

Conclusión: La totalidad de los estudiantes que resolvieron la actividad propuesta, determinó una representación simbólica de un cuadrado mágico de lado tres construido por el método hindú, de forma análoga a la presentada en la Figura 53. Lo cual indica un estrato *simbólico* de la expresión de la generalidad. Además dicho grupo de estudiantes, verificó la validez del método, a través de la comparación de la suma de cada fila, columna y diagonal del cuadrado mágico. Lo que supone el cumplimiento de la etapa *verificación de las fórmulas.*

Resultado pregunta 3.

Pregunta 3. Conforme un grupo de tres estudiantes y den un ejemplo de cómo crear un cuadrado mágico a partir de:

a. Dos cuadrados mágicos.
b. Un cuadrado mágico.
c. Un cuadrado mágico y un número.

La pregunta se propuso con el fin de que los estudiantes, explorarán y se acercarán a posibles operaciones en el conjunto de cuadrados mágicos de lado tres. Además en esta tarea, se esperaba que los estudiantes a través de la interacción entre pares, recorrieran las etapas para la expresión de la generalidad, descritas a lo largo del presente documento y expusieran posteriormente su exploración.

En la primera sesión de la actividad se conformaron tres grupos (denominados A, B y C), cada uno compuesto por tres estudiantes, como lo sugería la guía de trabajo. Cada grupo encontró una solución a los literales a, b y c, expuestos en la pregunta. La cuál fue expuesta por los mismos, en la segunda sesión de clase destinada para la actividad. Ya en la segunda sesión, antes de que los estudiantes comenzaran a exponer sus hallazgos, el docente propuso a cada grupo, que validaran los mismos a través del caso general. Ello implicaba, que los estudiantes utilizaran una representación simbólica, de los cuadrados mágicos usados en la formulación de sus “operaciones”. Así pues, el análisis de la pregunta se basa en la exposición realizada por los estudiantes y las evidencias recogidas en la guía de trabajo.

Para el literal a, que indica crear un nuevo cuadrado mágico a partir de otros dos, los tres grupos sugirieron la creación del cuadrado, ubicando en cada casilla el valor de la suma de los términos correspondientes a la misma casilla en los otros dos, como se presenta a continuación:

El grupo A presentó el ejemplo correspondiente a la Figura 54. En su exposición manifiestan haber verificado, que el arreglo resultante corresponde a un cuadrado mágico. Este grupo no determinó una expresión general de la operación y su validez.

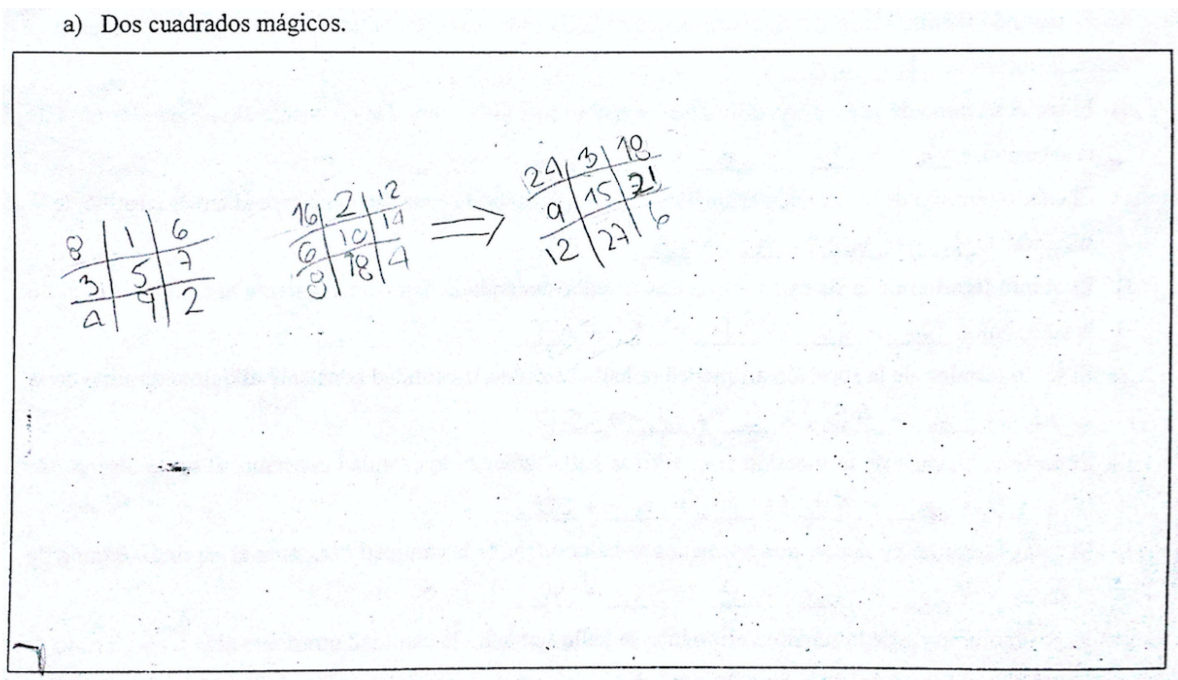


Figura 54. Ejemplo presentado en la exposición del grupo A.

El grupo B formula su “operación” de manera idéntica a la expuesta por el grupo A y adicionalmente, logra expresarla de forma simbólica, utilizando la misma notación que la mostrada en la Figura 55, excepto por el uso de la letra P en lugar de O. Durante su exposición, el grupo de estudiantes no presenta el ejemplo numérico expuesto en la Figura 55 y tampoco la relación entre las cifras mágicas de los cuadrados involucrados en la “operación”, se centra en complementar el trabajo realizado por el grupo A.

Adicionalmente en el transcurso de su exposición, la representación simbólica del cuadrado mágico resultante, se re expresa de la misma forma (algebraica), que cualquiera de los otros dos, lo cual fue orientado por el maestro y se describe en la siguiente transcripción que corresponde a los hechos ocurridos, luego de que la estudiante escribiera en el tablero la representación simbólica de la “operación”.

a) Dos cuadrados mágicos.

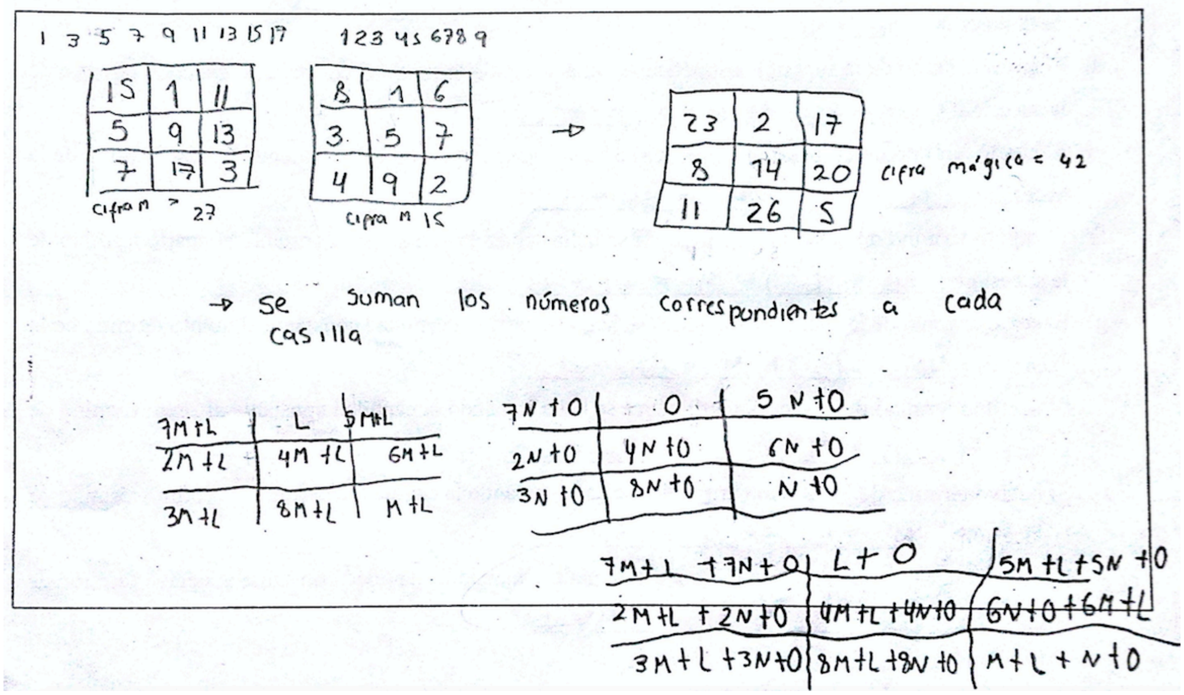


Figura 55. Notación simbólica utilizada por el grupo B en su exposición.

1. Docente: ¿si es claro lo que hizo (la estudiante L) ahí?
2. Estudiantes en coro: si.
3. Estudiante R: sumo los cuadrados mágicos.
4. Docente: ¿y ese es un cuadrado mágico? (…) ¿es un cuadrado mágico, si o no? (…) fíjense en una cosita. (estudiante L) te voy a pedir un fa, ¿será posible, que puedas agrupar el $7M$, el $7N$ y el L y P, aparte?, ¿si es claro?, miremos la primera casilla.
5. Estudiante M: [sin levantarse de su puesto y en hablando en voz baja] 7, $M + N$…
6. Docente: ¡ayúdale!, ¿cómo sería? [dirigiéndose al estudiante M, quien se levanta de su puesto y toma el marcador]
7. Estudiante M: ¿lo hago en otro cuadro o..?
8. Docente: en otro cuadro o si quieres sólo toma esa casilla [indicando la casilla de la posición (1, 1) del cuadrado mágico resultante]
9. Estudiante M: e.. [escribe en el tablero $7\,(M + N) + (L + P)$].
10. Docente: ¡listo! Fíjense en una cosa de lo que acaba de hacer (el estudiante M), ¡bueno! Miren esos tres cuadros que están ahí, ¿qué me pueden decir al respecto?, ¿tienen la misma forma o no?
11. Estudiantes en coro: sí.
12. Docente: ¿si es claro lo que hizo (el estudiante M)? (…) fíjense que lo que hizo (el estudiante M) fue, tomó este y este [señalando los términos $7M$ y $7N$ del cuadrado escrito por la estudiante L] y factorizó el 7, además agrupó L y P. (…) uno podría decir que $M + N$ es un número real (…), voy a decir que eso es Z, por decir algo, y que este otro [señalando $L + P$] el $L + P$ es digamos Y. Entonces fíjense que esta casillita [señala a la casilla de la posición (1, 1) del cuadrado mágico resultante] se puede expresar de esta misma manera [señala a la casilla de la posición (1, 1) del primer sumando], puesto que esto será $7Z + Y$.

13. Estudiante M: o sea con la casilla de arriba (no se puede expresar)
14. Docente: no no no, que tiene esta forma [señala al término $7M + L$], siete por un número real, más un número real. Fíjense que este otro también [ahora señala a la casilla de la posición (1, 1) del segundo sumando $(7N + P)$] siete por un número real, más un número real, y este resultado, la misma vaina, miren [señala a la expresión 7 $(M + N) + (L + P)$] siete por un número real, más un número real ¿y en todas las casillas se puede hacer lo mismo?
15. Estudiante N: sí.
16. Estudiante M: menos en la de $L + P$, ah pero.., número real, número re*al*...
17. Docente: número real [señala al término de la posición (1, 2) del primer sumando L], número real [señala al término de la posición (1, 2) del segundo sumando P] y número real [señala al término de la posición (1, 2) del cuadrado resultante $L + P$] ¿si o no?
18. Estudiantes en coro: sí.
19. Docente: Fíjense en una cosa bien interesante que acaban de hacer entre los dos, me parece bien chévere y es, que cuando ustedes lo pueden organizar de esta manera [señala a la expresión 7 $(M + N) + (L + P)$], efectivamente lo que obtienen, tiene la misma forma [señala al cuadrado mágico que corresponde al primer sumando] y eso es suficiente para decir que ese resultado también es un cuadrado mágico, ¿si o no?
20. Estudiantes en coro: si, cierto, y funciona para todos.
21. Docente: ¡bacano!

Por otra parte, el grupo C formula su "operación" bajo el mismo concepto de los otros dos grupos (sumando término a término correspondientes), pero utilizando como sumandos, a un cuadrado mágico y otro cuyos términos son opuestos al primero; con esto al sumarlos siempre obtendrán cómo resultado, el cuadrado mágico compuesto por ceros. Un ejemplo de esto, se muestra en la Figura 56.

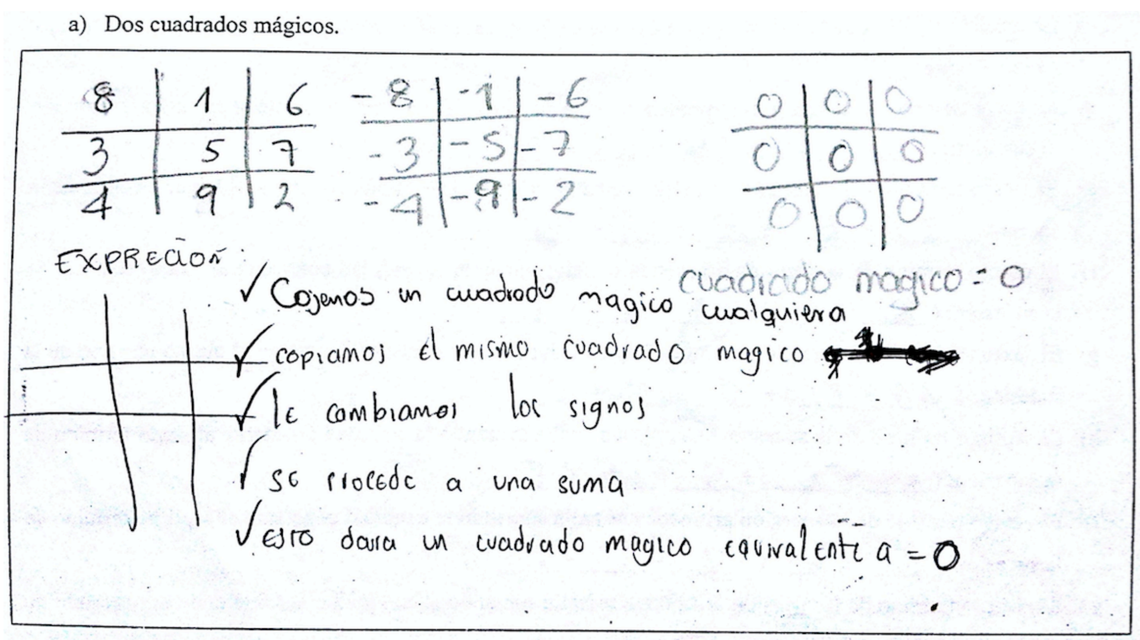


Figura 56. Ejemplo expuesto por el grupo C, para resolver el problema.

La exposición del grupo C comenzó con la explicación del ejemplo presente en la Figura 56, descrito de acuerdo a las frases clave que allí se muestran. Después de esto el estudiante expositor, presentó la "operación" de forma general, a través del lenguaje simbólico, cómo se muestra en la Figura 57.

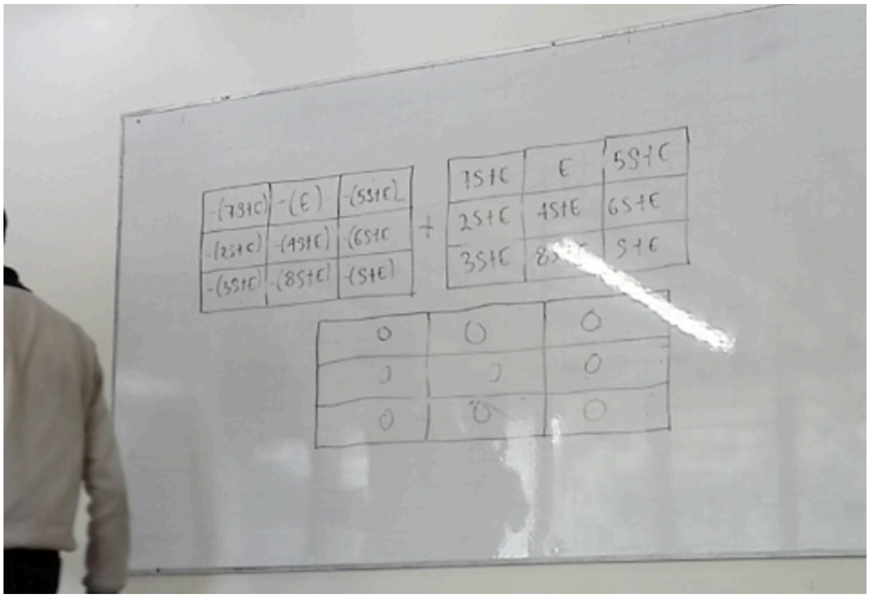


Figura 57. Representación simbólica de la "operación" presentada por el grupo C.

Adicionalmente los estudiantes presentes en el taller, argumentan que el cuadrado compuesto por ceros es mágico, debido básicamente a dos razones; la suma de cualquier fila, columna o diagonal es cero y a que cada casilla puede escribirse como sigue en la Figura 58.

$7(0) + 0$	0	$5(0) + 0$
$2(0) + 0$	$4(0) + 0$	$6(0) + 0$
$3(0) + 0$	$8(0) + 0$	$0 + 0$

Figura 58. Cuadrado mágico cuyos términos son cero, escrito en la forma genérica.

Conclusión: los tres grupos coincidieron en construir, un nuevo cuadrado mágico a partir de dos conocidos, por medio de la suma de los términos correspondientes. Sin embargo, tienen diferencias en la forma en que la presentan, puesto que el grupo A, lo hizo basado en un ejemplo de un caso particular, aunque mencionando la posibilidad de hacerlo con cualquier par de cuadrados mágicos y el grupo B, a través de una expresión general. Así pues estos grupos se ubican en el estrato *contextual* y *simbólico* respectivamente. Además el grupo C, presentó lo que se podría llamar la enunciación de los elementos "opuesto" y "módulo" de la "adición" de cuadrados mágicos, por medio de un caso particular y del general, lo cual lo ubica en el estrato *simbólico*.

Se resalta que en el trabajo realizado en la guía por el último grupo (Figura 56), se enuncian las frases clave del cómo resolver el problema. Si sólo se revisara esta evidencia escrita, el estrato correspondiente a la expresión de la generalidad del grupo sería el *contextual*. Esto indica, que determinar las habilidades con las que un estudiante expresa la generalidad, no resulta ser un trabajo sencillo, puesto que el estudiante utiliza distintos medios semióticos para representar la generalidad, dependiendo de lo que la situación amerite.

Para el literal b, que sugiere crear un nuevo cuadrado mágico a partir de uno conocido, se esperaba que los grupos indagaran, acerca de la “rotación” y “reflexión” del cuadrado mágico. Sin embargo, ninguno de los grupos en su exposición propuso algo parecido, los tres describieron la creación del cuadrado a partir de la multiplicación y división por un número, (probablemente porque el enunciado no fue preciso). Las respuestas dadas por los estudiantes a esta pregunta se ajustan al literal c, y por ende serán analizadas en el mismo.

Por otra parte en las evidencias recogidas en la guía de trabajo, se encontró que el grupo C, formuló inicialmente como solución al literal b, la creación del nuevo cuadrado, al invertir los términos de la sucesión aritmética que componen el cuadrado mágico conocido, lo cual se muestra en la Figura 59, que expone un ejemplo particular de la “operación”.

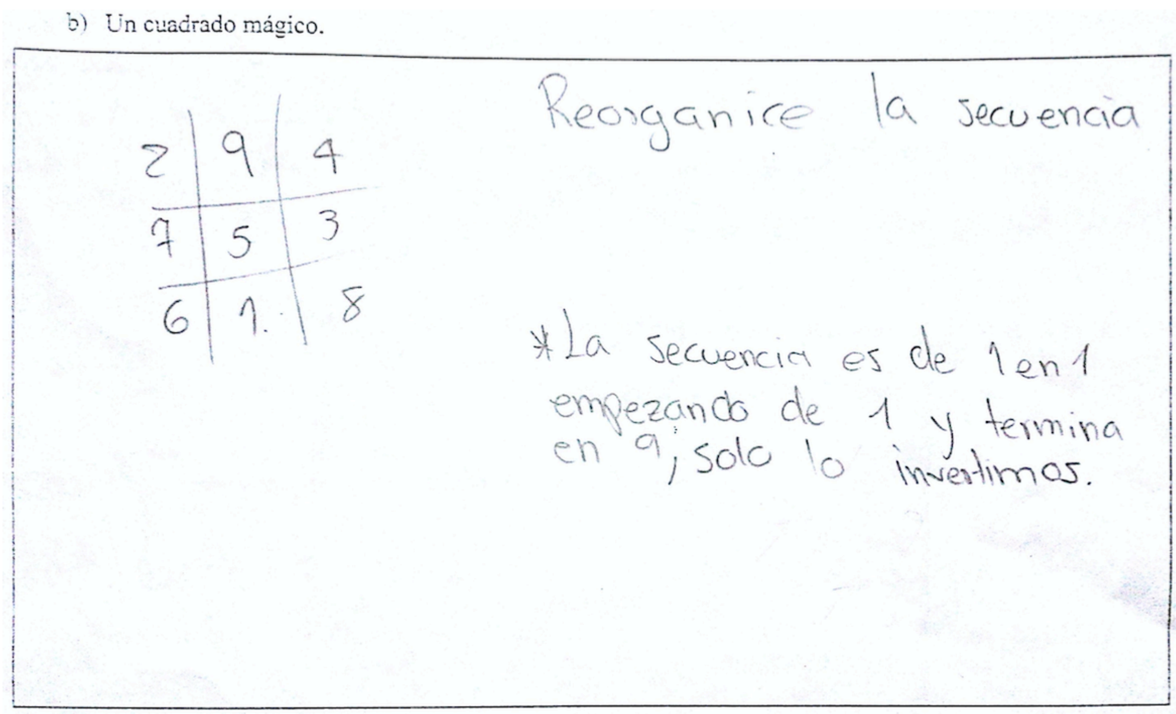


Figura 59. Creación de un nuevo cuadrado mágico a partir de la reorganización de la sucesión aritmética.

Conclusión: De acuerdo a la explicación dada en la Figura 59, que indica reorganizar la secuencia y al contexto propio de la pregunta, que implícitamente sugiere la aplicación de la “operación” para cualquier cuadrado mágico, la expresión de la generalidad puede clasificarse en el estrato *contextual*.

Además es probable que el grupo C no presentará esta solución, (que puede además interpretarse como una rotación) por la ausencia del estudiante que lideró la estrategia para resolver el problema.

Para el literal c, que enuncia la creación un nuevo cuadrado mágico a partir de uno conocido y un número, los tres grupos sugirieron, multiplicar, sumar y dividir por el número a cada uno de los términos del cuadrado mágico inicial, lo cual se describe a continuación:

El grupo A, expone la creación del nuevo cuadrado mágico, multiplicando cada término del cuadrado conocido por un número, para ello exponen el ejemplo particular (mostrado en la Figura 60) de la forma en que se realiza la operación, sin utilizar un lenguaje simbólico. Al final de su exposición, mencionan que el método también funciona al realizar la división de cada término del cuadrado mágico por un número, que corresponde a lo expuesto por ellos en el literal b.

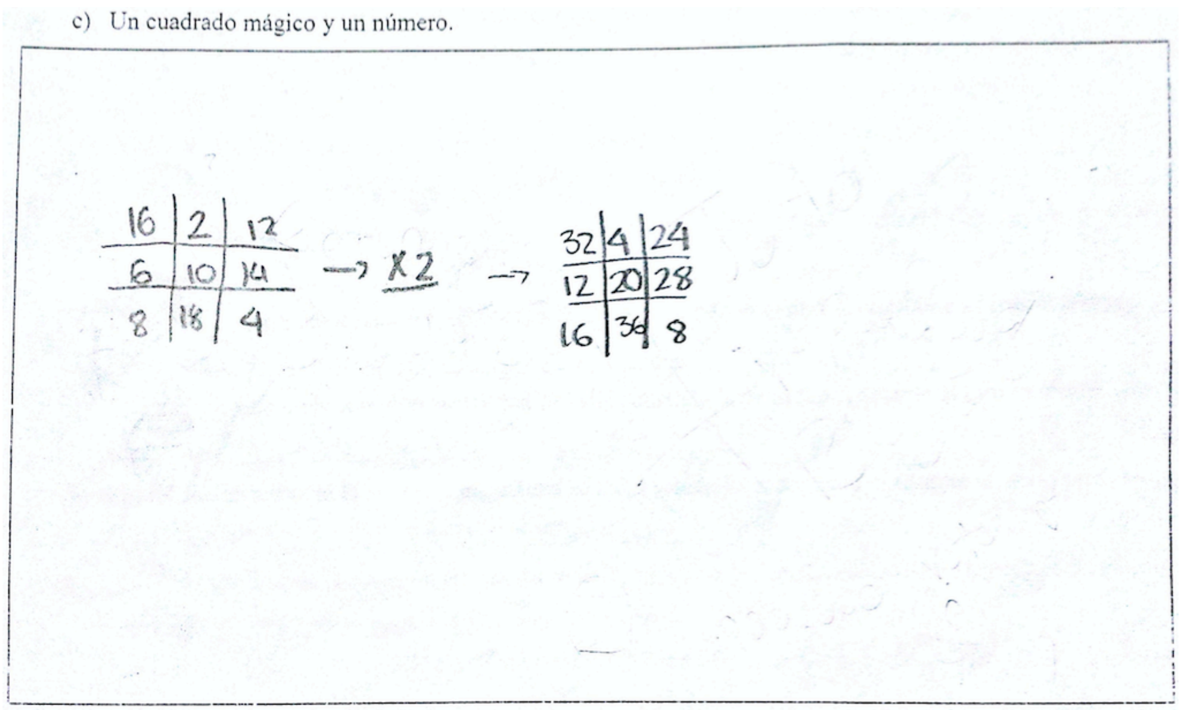


Figura 60. Producto de un número por un cuadrado mágico.

De igual forma el grupo C, da solución al problema planteado en el literal c, a través de la multiplicación del número, por cada uno de los términos del cuadrado mágico conocido y ubicando el resultado, en la misma posición de estos últimos. Sin embargo, a diferencia del grupo A, utiliza un lenguaje simbólico para representar su solución.

La solución fue explicada en dos momentos; en el primero utiliza la representación general de los términos del cuadrado mágico y el número 2, arrojando como resultado un cuadrado mágico representado con la misma expresión simbólica de los términos del cuadrado inicial multiplicados por el número 2, en el segundo momento, el expositor cambia el número 2, por la letra Z, indicando ahora que representa cualquier número mostrando la información presente en la Figura 61.

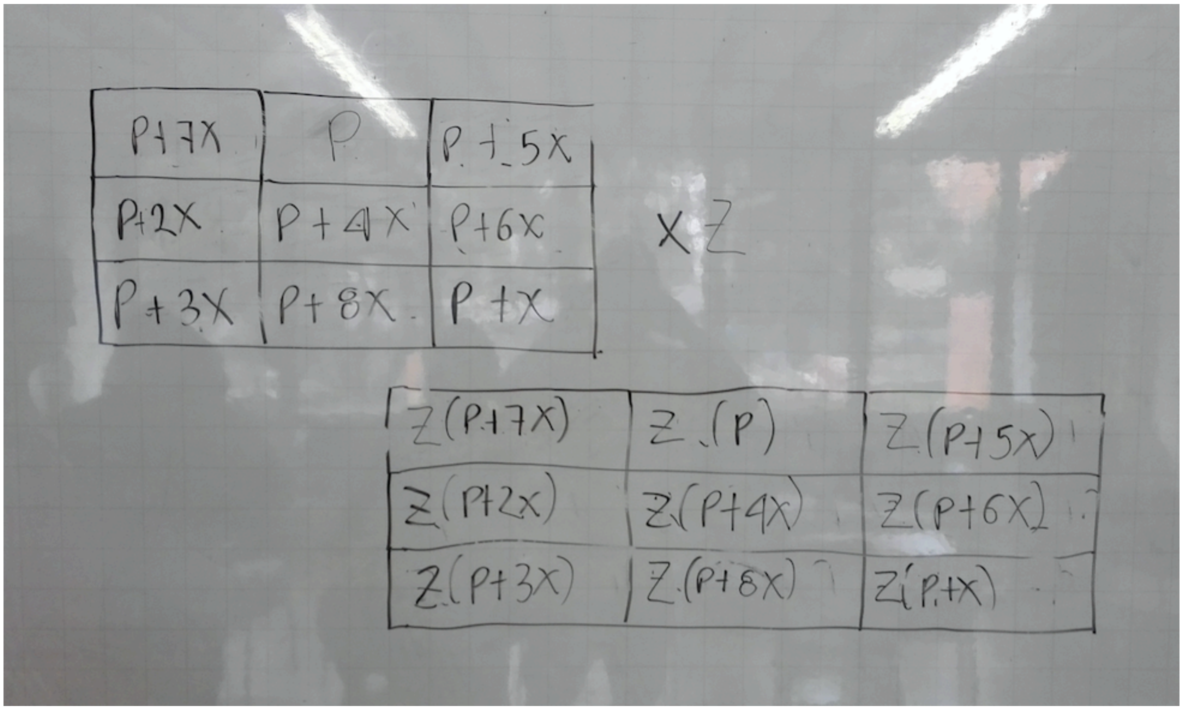


Figura 61. Representación simbólica del producto entre un cuadrado mágico y un número.

Finalmente el grupo B expone su solución, a partir de la suma de los términos de un cuadrado mágico conocido y un número. Explica su respuesta a través de un ejemplo numérico particular y de la representación simbólica del cuadrado mágico resultante luego de hacer la "operación"; lo cual se presenta en la Figura 62, correspondiente a la evidencia escrita recogida en la guía, realizada por un miembro del grupo.

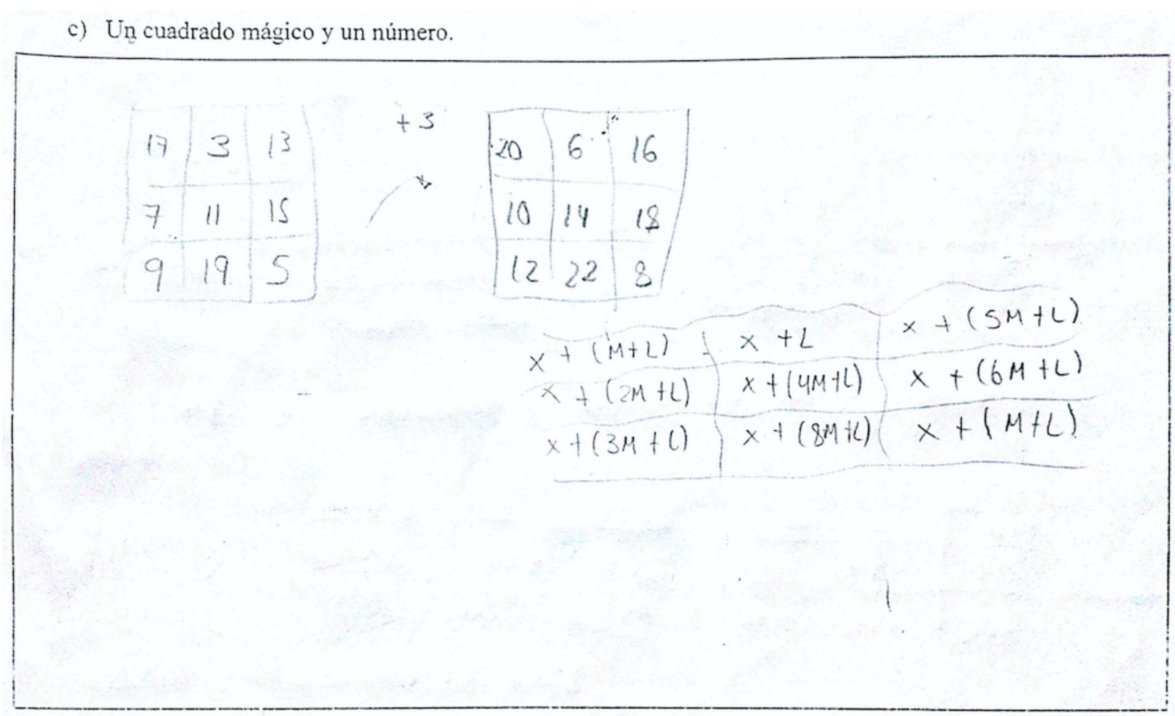


Figura 62. Adición de un número a un cuadrado mágico.

Conclusión: Los grupos expositores encontraron solución al literal c, planteado en la pregunta. El grupo A, lo hizo basado en un ejemplo de un caso particular, mencionando la posibilidad de realizar un producto o cociente entre cualquier cuadrado mágico y cualquier número. El grupo B describió la adición entre un cuadrado mágico y un número a través de una expresión general, de igual forma el grupo C, expuso el producto entre un cuadrado mágico y un número, a través del lenguaje simbólico. Así pues estos grupos se ubican en el estrato *contextual* y *simbólico* respectivamente.

Finalmente la totalidad de los estudiantes, recorrió las etapas, *ver, decir, registrar* y *verificar las fórmulas* en la búsqueda de la solución de cada literal propuesto en la pregunta 3, puesto que tuvieron que asegurarse que sus propuestas dieran como resultado cuadrados mágicos.

4.3. Descripción de ajustes

Una vez realizado el pilotaje de las actividades propuestas, se establece la necesidad de realizar algunos ajustes a las mismas, estos se describen a continuación:

Se realiza un cambio en la redacción de las preguntas 2, 3 y 4 de la prueba diagnóstica, puesto que en la implementación se evidenció que las mismas no eran muy claras para los estudiantes.

Adicionalmente en la actividad 1 de la propuesta didáctica, se presentan de forma explícita, las instrucciones para la construcción del material concreto. Lo cual surge en la implementación como una estrategia para facilitar la manipulación de los números que componen las sucesiones aritméticas en la construcción de los cuadrados mágicos. Por esta razón se hace una modificación en la redacción de la primera pregunta de la actividad 1, relacionada con el uso del material concreto. Las preguntas 3 y 4 de la actividad, no se presentan en la propuesta, puesto que estas se abordan en las actividades siguientes.

La actividad 2 de la propuesta didáctica, retoma las preguntas 3 y 4 de la actividad 1 implementada. En esta se presenta una solución a la pregunta relacionada con la construcción del cuadrado mágico abordado en la primera actividad, con el fin de facilitar la construcción de los cuadrados mágicos propuestos. Se agrega información relacionada con la definición de cifra mágica, que puede ser útil en la formulación de métodos para construir cuadrados mágicos. En esta actividad no se pregunta por la relación entre la posición de los números en la lista y la ubicación de estos en el cuadrado mágico. Puesto que se considera que en la actividad 3 de la propuesta, se abordan conceptos que pueden ser útiles para su solución.

Así pues la actividad 3 de la propuesta didáctica, corresponde a una modificación de la actividad 2 implementada. En la primera pregunta, se presenta de forma gráfica a la sucesión cuyos cuatro primeros términos son 2, 4, 6 y 8. Además se modifica su redacción, para hacerla más comprensible para los estudiantes. No se estipula el uso del dado para resolver la segunda pregunta, puesto que se considera que esto puede desorientar la actividad. Además se agregan las preguntas 3 y 4, relacionadas con la adaptación de la actividad al uso del material concreto.

De igual forma en la actividad 4 de la propuesta didáctica, se retoma el último punto de la actividad 2 aplicada en el aula. Para esto se explicita de una manera más clara, la metodología a seguir por parte de los estudiantes para construir cuadrados mágicos, con las sucesiones aritméticas generadas en la actividad 3 de la propuesta. De esta forma se pretende que los estudiantes desarrollen habilidades para construir cuadrados mágicos, a partir de los patrones y regularidades que vayan observando a lo largo de la propuesta. Así mismo en la actividad 4, se aborda la pregunta relacionada con la búsqueda de la relación entre la posición de un término en la sucesión aritmética y la ubicación del mismo en el cuadrado mágico, planteada en la primera versión de la actividad 1. Dado que se considera que es hasta este momento, cuando los estudiantes han adquirido el bagaje suficiente sobre la construcción de los cuadrados mágicos, para responder de forma consiente y argumentada esta pregunta.

La actividad 5 de la propuesta didáctica, corresponde a una adaptación de la actividad 3 implementada. En esta se sustituyen los 2 cuadrados mágicos de lado cinco, presentados en la guía por uno de lado siete. Debido a que dichos cuadrados podían ser usados por los estudiantes como modelos para la construcción del cuadrado de lado cinco, formulado en el punto 4. La existencia de estos cuadrados mágicos en la primera versión de la actividad, de alguna forma impedía que se hiciera una exploración más profunda de los patrones y regularidades relativos a la construcción de cuadrados mágicos. Adicionalmente en el punto 4 de la guía se presentan algunos términos de la sucesión en el cuadrado mágico, con el fin de orientar y facilitar la tarea de construirlo. También se modifica la redacción de las preguntas 1, 3 y 4 de la actividad implementada, en busca de una mejor compresión de las preguntas.

Así mismo la actividad 6 que se presenta en la propuesta didáctica, corresponde a una adaptación de la actividad 4 implementada en el aula. En esta se modifica la redacción de las preguntas 1 y 2 de la primera versión de la actividad, puesto que en estas se restringía la solución, al uso del método hindú para la construcción de cuadrados mágicos. Además se decide tomar el punto 3 de la actividad para el diseño de la actividad 7 de la propuesta didáctica.

Finalmente la actividad 7 de la propuesta didáctica, se basa en el tercer punto de la actividad 4 implementada en el aula. Este punto se divide en tres preguntas, orientadas a que los estudiantes conjeturen sobre operaciones en los cuadrados mágicos. En ello se modifica la forma en que se presentan las preguntas, haciendo específica la necesidad de presentar un ejemplo, explicación y uso de una expresión general de las conjeturas que realicen los estudiantes.

CAPÍTULO 5.

PROPUESTA DIDÁCTICA

La propuesta didáctica que a continuación se presenta, se plantea para generar un puente entre la aritmética y el álgebra, a través de la exploración de procesos de generalización en el estudio de algunas propiedades de los cuadrados mágicos de lado impar.

Su objetivo es que los estudiantes reconozcan algunos elementos del lenguaje propio de las matemáticas, motivándolos a que ellos mismos utilicen letras o símbolos, para representar objetos matemáticos.

Un cuadrado mágico es un arreglo, como su nombre lo indica cuadrado, de números donde la suma de los términos de cada columna, fila y diagonal, es la misma.

Se proponen seis actividades para implementar en el aula. En cada una de ellas es fundamental el acompañamiento del docente durante el desarrollo de las guías que aquí se presentan.

Para ello, a continuación encontrará una serie de recomendaciones generales y la descripción del rol del docente durante la puesta en práctica de la propuesta didáctica.

Además para cada una de las actividades que conforman la propuesta, se estipulan los objetivos de enseñanza, la estructura, tiempo sugerido, recomendaciones particulares y las guías que orientan el proceso.

5.1. Recomendaciones generales:

- Previo a la implementación de las actividades, el docente debe desarrollar todas las guías, para poder detectar las posibles soluciones que van a encontrar los estudiantes a los problemas propuestos. Esto también le permitirá tener claridad en la manera en que puede abordar las dudas, que lleguen a presentarse en la interpretación de las preguntas.

- Las actividades que se proponen en esta secuencia didáctica, deben desarrollarse en primer lugar por los estudiantes de forma individual, puesto que cada uno debe desarrollar sus propios mecanismos para resolver los problemas, retos, preguntas o situaciones que se plantean. El trabajo individual de cada estudiante, se constituye posteriormente en un aporte relevante en la construcción del conocimiento que se desea abordar en el aula de clase. Así pues, es importante que el docente resalte que toda la producción que hace cada estudiante resulta ser valiosa, ya que esta enriquece el pensamiento matemático que se tiene en el aula.

- Para algunas de las actividades se sugiere desarrollar un trabajo grupal (cada grupo compuesto preferiblemente por tres estudiantes), sobre los mismos problemas, retos, preguntas o situaciones que fueron resueltos previamente de forma individual. Esto debido a que en el trabajo grupal, los estudiantes desarrollan habilidades sociales, competencias relacionadas con la comunicación verbal o escrita, se ven en la necesidad de llegar a acuerdos, reconocen y valoran el quehacer de ellos mismos y del otro. Además rectifican, corroboran o complementan lo desarrollado en las actividades individuales construyendo conocimiento colaborativo, entre otros.

- El docente debe observar el trabajo de cada uno de los estudiantes, con el fin de motivarlos si es necesario.

- El docente debe evitar en lo posible abordar de forma magistral, los conceptos que se involucran en las actividades, puesto que el recurso más importante en el desarrollo de esta propuesta, es el aporte y producción de cada estudiante al conocimiento colectivo.

- El docente debe tener la capacidad de consolidar y guiar el conocimiento, que el grupo de estudiantes construye, mediante preguntas orientadoras.

- Se sugiere que el cierre de cada una de las actividades, sea la socialización del trabajo (individual o grupal según corresponda) a todos los estudiantes del curso. Esta etapa es fundamental porque es donde se consolida el conocimiento que se ha construido en el proceso.

- El docente es quien lidera y orienta la etapa de socialización, promoviendo discusiones de tipo argumentativo en el grupo de estudiantes.

- Durante las socializaciones, se debe incentivar al colectivo de estudiantes (en un ambiente de respeto) a verificar, retroalimentar, validar y aportar a las explicaciones, hallazgos, métodos, procesos y/o respuestas propuestas por ellos mismos.

- Es posible que el desarrollo de las guías o la socialización de las mismas, tome más tiempo del que se espera; esto no debe convertirse en un problema. El tiempo de la implementación de cada actividad puede variar, de acuerdo a lo que el docente estipule. Así mismo, los conceptos involucrados en las actividades, pueden profundizarse aún más, conforme a las necesidades del grupo de estudiantes con quienes se implemente.

- El docente es quien determina el momento apropiado para avanzar a la siguiente actividad. Lo cual depende del cumplimiento de los objetivos de cada una de ellas. Tiene la libertad de plantear actividades de refuerzo según lo estime conveniente.

- Debe tenerse en cuenta que la generalidad puede expresarse de distintas maneras, así mismo que el proceso para llegar a usar un lenguaje simbólico puede tomar bastante tiempo. Por eso importante evitar acelerar los procesos que se vayan dando de manera natural en el aula de clase.

5.2. PRUEBA DIAGNÓSTICA

Objetivo:

- Determinar la habilidad en el reconocimiento, expresión y generalización de patrones.

Estructura de la implementación:

Momento 1. Implementación de la prueba diagnóstica. (50 min)

Momento 2. Socialización de la prueba. (40 min)

Recomendaciones:

- La guía de la prueba diagnóstica debe desarrollarse en forma individual.

- En el caso en que los estudiantes, presenten dificultades en el reconocimiento y generalización de patrones, se sugiere que el docente proponga actividades relacionadas con la observación de regularidades en la naturaleza, por ejemplo: el movimiento de los cuerpos, el sistema solar, el amanecer, el anochecer, la siembra de las plantas y las flores, los periodos de gestación de los animales, entre otros. Además debe proponer situaciones que involucran determinar el término, objeto, color, número o gráfico que continua en una secuencia, dados algunos elementos de la misma.

- Es posible que algunos estudiantes cometan errores en la resolución de la pregunta 6, esto se debe posiblemente al orden en que se presentan las preguntas: en los tres primeros puntos se pregunta por el número de la figura dada la cantidad de círculos que la conforman. En los puntos cuarto y quinto, se da el número de una figura y se pregunta por la cantidad de círculos que componen, y en el sexto punto se retoma la pregunta formulada en los tres primeros ítems. Estos errores no significan que el estudiante tenga dificultades relacionadas con el reconocimiento y generalización de patrones, se deben posiblemente a un problema en la interpretación de la pregunta. Ello implica que puede continuarse con las actividades planteadas en la propuesta, haciendo énfasis en una buena comprensión de las preguntas.

- Recuerde hacer la socialización de la prueba, con el fin de hacer una retroalimentación de las respuestas dadas por los estudiantes.

TALLER CUADRADOS MÁGICOS
PROCESOS DE GENERALIZACIÓN – PRUEBA DIAGNÓSTICA

INSTITUCIÓN: ____
NOMBRE: ____
EDAD: ______________ **CURSO:** _____________ **FECHA:** ________________

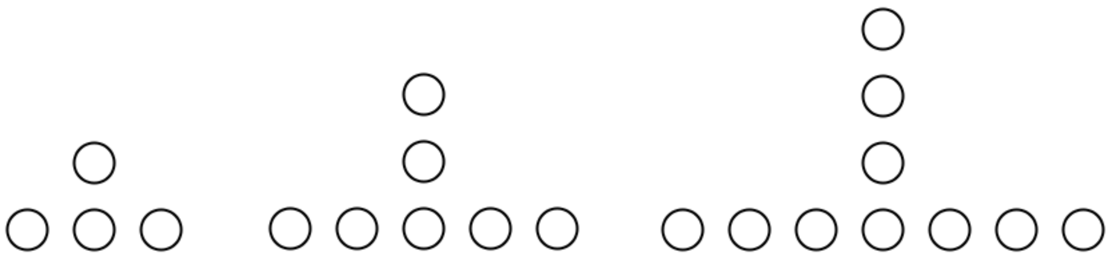


figura 1. figura 2. figura 3.

De acuerdo a la secuencia anterior:

1. Dibuja las figuras 4 y 5.

figura 4.	figura 5.

2. Determina, sin dibujar las figuras, el número de círculos que conforman la figura diez, si se continúa la secuencia. Explica cómo lo hiciste.

3. Determina, el número de círculos que conforman la figura 99, si se continúa la secuencia. Explica cómo lo hiciste.

4. Juan hizo la gráfica de una figura perteneciente a esta secuencia. Él dibujó exactamente 61 círculos. ¿A qué número de figura corresponde esta gráfica? Explica la manera como encontraste tu respuesta.

5. ¿Existe alguna figura de la secuencia que tenga 200 círculos? Explica tu respuesta.

6. Escribe un mensaje a un compañero que no asistió a la clase. En este explica con claridad y con todo detalle, cómo calcular rápidamente el número de círculos que tendría la figura 998 de esta secuencia.

Taller adaptado de:

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). *Tesis Doctoral.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas (p 93).

5.3. ACTIVIDAD 1

Objetivos:

- Facilitar la manipulación de los números para construir cuadrados mágicos, a través de la elaboración de material concreto.

- Propiciar el reconocimiento del concepto de cuadrado mágico, a través de la adaptación de un fragmento relacionado con su aparición en la historia y la aplicación del material.

Estructura de la implementación:

Momento 1. Elaboración del material concreto. (40 min)

Momento 2. Resolución de los problemas propuestos en la guía. (30 min)

Momento 3. Socialización. (20 min)

Recomendaciones:

- El docente debe elaborar previamente el material, para que los estudiantes lo palpen y observen las características de lo que individualmente deben construir.

- Es posible que algunos estudiantes al enfrentarse a las preguntas propuestas en la actividad, tiendan a frustrarse por no encontrar rápida o fácilmente su respuesta. Por lo tanto el docente debe buscar el medio para motivarlos, lo cual puede ser a través de pequeñas pistas (sin llegar a dar la solución). Preguntas como ¿qué número debo poner en el centro del cuadrado? Y ¿por qué? Pueden llevar al estudiante a un análisis más profundo de la pregunta y por ende un primer paso a la solución.

- Otra manera de motivar a los estudiantes durante el desarrollo de la actividad, es a través de la narrativa de hechos históricos relativos a los cuadrados mágicos, tal cómo, su uso en la edad media como cura y prevención contra la *Peste*, puesto que se pensaba que estos arreglos numéricos poseían ciertos poderes mágicos.

- En la etapa de socialización, el docente debe definir el concepto de cuadrado mágico o proponer un medio para que los estudiantes lo hagan, basados en la exploración realizada con la guía.

TALLER CUADRADOS MÁGICOS
PROCESOS DE GENERALIZACIÓN – ACTIVIDAD 1

INSTITUCIÓN: ____
NOMBRE: ____
EDAD: ________________ **CURSO:** _______________ **FECHA:** __________________

1. Sigue las instrucciones que se presentan, para construir una herramienta que facilita la elaboración de cuadrados mágicos.

Materiales:

- ✓ 1/8 de cartón paja, (sólo vas a utilizar la mitad de este, luego puedes compartir el sobrante con un compañero).
- ✓ Tijeras o bisturí.
- ✓ Regla.

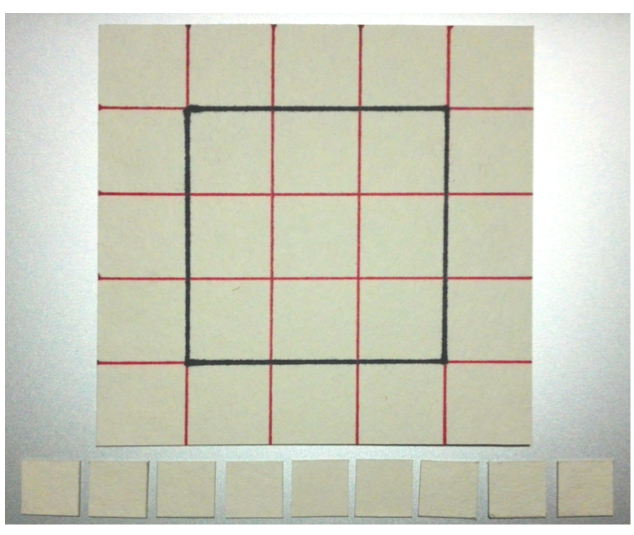
Instrucciones de construcción:

Paso 1. En el cartón paja y con ayuda de una regla, traza un cuadrado de dimensiones $15\ cm\ x\ 15\ cm$.

Paso 2. Con ayuda de unas tijeras o un bisturí, recorta el cuadrado que dibujaste en el cartón paja.

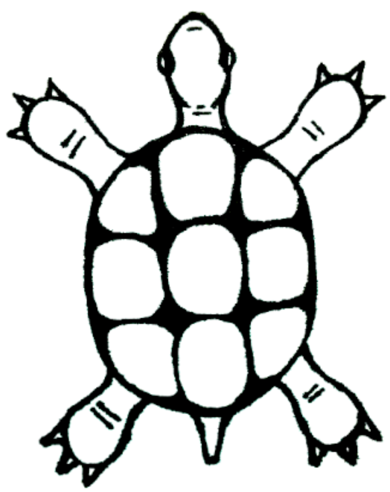
Paso 3. Sobre el cuadrado que acabas de recortar, dibuja una cuadrícula trazando paralelas a los lados, que estén separadas $3\ cm$ y marca con un color diferente al que usaste para trazar las paralelas, la cuadrícula interna, compuesta por nueve cuadritos, como se muestra en la figura.

Paso 4. Con el cartón paja restante, recorta nueve cuadrados de dimensiones $2\ cm\ x\ 2\ cm$, estos serán conocidos como fichas.



Los cuadrados mágicos ya eran conocidos en China muchos siglos antes de nuestra era. Según cuenta la leyenda, el río *Lo* estaba desbordado y, a pesar de las ofrendas que hacían al dios del río, no conseguían que disminuyera su caudal. Por suerte para los habitantes de la región, el emperador *Yu* observó que tras cada ofrenda aparecía una misma tortuga y, curiosamente, en las divisiones de su caparazón, tenía marcas que representan los números consecutivos de 1 a 9. Las marcas estaban dispuestas de tal forma que, la suma de los números en forma horizontal, vertical y diagonal, siempre era 15. Así pues, se hicieron quince ofrendas seguidas (o incluyeron quince objetos en la ofrenda, ¿quién sabe?) y las aguas del río retornaron al cauce habitual. (Adaptado de Trigo 2007 p. 91-92).

2. De acuerdo a la historia organiza y escribe los números de 1 a 9, en el caparazón de la tortuga, de tal forma que los números de cada fila, columna y diagonal sumen15.



Para resolver este problema debes marcar las fichas que construiste previamente, con los números de 1 a 9 y organizarlos sobre la cuadrícula de cartón paja, de acuerdo a lo que se te pide en el problema. Cuando encuentres la solución, ¡escribe los números en el caparazón de la tortuga!

3. Explica detalladamente las estrategias que seguiste para ubicar los números en la tortuga, sin importar que estas tuvieran o no éxito.

5.4. ACTIVIDAD 2

Objetivos:

- Propiciar la generación de estrategias, relacionadas con la construcción de cuadrados mágicos.

- Establecer un medio que propicie herramientas útiles en la construcción de cuadrados mágicos.

- Propiciar el reconocimiento de patrones relacionados con la construcción de cuadrados mágicos.

Estructura de la implementación:

Momento 1. Desarrollo individual de la guía (60 min)

Momento 2. Desarrollo de la guía en grupos de tres estudiantes (30 min)

Momento 3. Socialización (30 min)

Recomendaciones:

– Motivar continuamente a los estudiantes, sobre la posibilidad de construcción de los cuadrados mágicos que se presentan en a guía de estudio.

– Resulta de gran relevancia, que en la primera parte de la actividad el maestro no intervenga hasta que los estudiantes hallan intentado construir por sí mismos los cuadrados mágicos propuestos en la guía. Ya que de esta exploración, es posible que surjan estrategias creativas o ideas que aporten a la generación de uno o más métodos para construir cuadrados mágicos.

– En lo posible evitar intervenir de forma directa en los métodos de construcción de los cuadrados mágicos utilizados por los estudiantes. Puesto que esto puede sesgar la actividad a un solo método de construcción (el del maestro).

– En el caso extremo, en que los estudiantes se empiecen a sentir frustrados, es posible orientarlos en la construcción de los cuadrados mágicos, a través de la formulación verbal de preguntas, que los lleven a pensar en la relación de los cuadrados mágicos propuestos en la guía y el cuadrado mágico resuelto en la actividad anterior. La cuál tiene que ver, con que los estudiantes lleguen a determinar que los números de 1 a 9, de la sucesión aritmética propuesta en la actividad 1, pueden referirse además, a la posición de los términos de las sucesiones aritméticas propuestas en la actividad 2.

- En el desarrollo de la guía por grupos, es posible que los estudiantes reconozcan que con los términos de una sucesión aritmética puede obtenerse más de un cuadrado mágico. Lo cuál puede ser un insumo para la actividad 7.

- Hacer la socialización por grupos de trabajo.

- Durante la etapa de socialización, es importante reconocer y dar valor a cada uno de los métodos de construcción que presenten los estudiantes. No puede darse un lugar privilegiado a los posibles métodos de construcción que presenten los estudiantes.

TALLER CUADRADOS MÁGICOS
PROCESOS DE GENERALIZACIÓN – ACTIVIDAD 2

INSTITUCIÓN: ____
NOMBRE: ____
EDAD: _______________ **CURSO:** ______________ **FECHA:** _________________

A continuación se presenta una solución al problema de la tortuga, propuesto anteriormente, los números que se ubicaron y el valor de la suma de cada fila, columna o diagonal, conocida como cifra mágica.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Números: $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$

Suma o Cifra mágica: 15

1. Con ayuda del material construido anteriormente, ubica los números $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$, en la cuadrícula, de tal forma que la suma de cada fila, columna o diagonal sea 30.

Números: $2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18$

Suma o Cifra mágica: 30

2. Explica detalladamente la forma en que construiste el cuadrado mágico.

3. Con ayuda del material construido anteriormente, ubica los números $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27$, en la cuadrícula, de tal forma que la suma de cada fila, columna o diagonal sea la misma, ¿Cuál es el valor de la cifra mágica?

Números: $3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27$

Cifra mágica:

4. Con ayuda del material construido anteriormente, ubica los números $5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29$, en la cuadrícula, de tal forma que la suma de cada fila, columna o diagonal sea la misma, ¿Cuál es el valor de la cifra mágica?

Números: $5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29$

Cifra mágica:

5. Explica detalladamente la forma en que construiste el cuadrado mágico

6. ¿Qué tienen en común las listas de los números que se utilizaron para construir los cuadrados mágicos?

5.5. ACTIVIDAD 3

Objetivos:

- Propiciar el reconocimiento de patrones en las sucesiones aritméticas.
- Establecer un medio para la caracterización de las sucesiones aritméticas.
- Propiciar que los estudiantes reconozcan, que toda sucesión aritmética tiene un término inicial y una diferencia común.

Estructura de la implementación:

Momento 4. Desarrollo del primer punto de la guía en forma individual. (15 min)

Momento 5. Socialización primer punto. (15 min)

Momento 6. Desarrollo de los puntos restantes en forma individual. (30 min)

Momento 7. Socialización (30 min)

Recomendaciones:

- Debe hacerse una socialización previa al desarrollo del segundo punto, para que los estudiantes tengan herramientas para resolverlo, puesto que este tiene una dificultad adicional a la construcción de una sucesión aritmética, determinada por el hecho de involucrar dos números dados.
- En la etapa de socialización, el docente debe sugerir a los estudiantes, escribir de forma simplificada las características de las sucesiones propuestas, con el fin de aproximarlos al uso de un lenguaje simbólico, sin forzar el proceso (recuerde que el lenguaje simbólico puede ser una palabra, un dibujo, etc.). Además resulta pertinente reemplazar el término "secuencia" que se usa inicialmente, por "sucesión aritmética".
- El segundo problema, hace referencia a *patentar la secuencia*, esto consiste en que por orden de llegada, cada estudiante presente su sucesión al docente, para que sea avalada y escrita en el tablero. Esto lleva a que todos tengan conocimiento de todas las sucesiones aritméticas propuestas. El docente debe reiterar que las sucesiones que ya se encuentren escritas en el tablero no pueden repetirse.
- Aunque la actividad se centre en el análisis de sucesiones aritméticas, es posible que algún estudiante proponga una sucesión geométrica. Este hecho debe explotarse y orientarse al estudio y reconocimiento de las características del arreglo numérico cuadrado, que genera dicha sucesión, en el cual el producto de los términos que componen las filas, columnas y diagonales es el mismo. En caso de que esto no ocurra, puede continuarse con el desarrollo de las actividades, ya que este no

corresponde a un requisito o concepto necesario para la implementación de la propuesta.

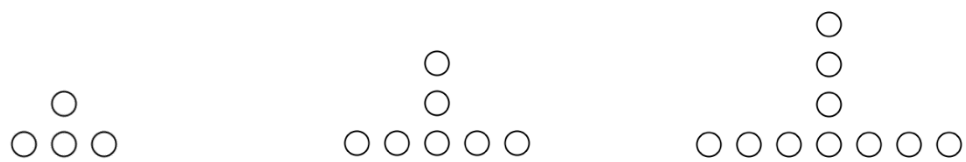
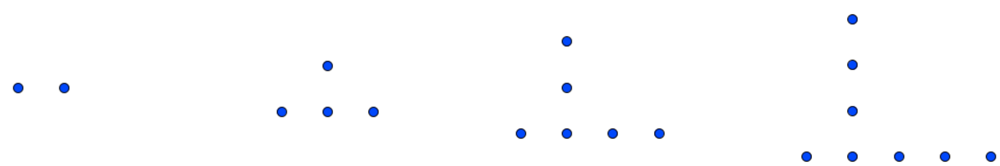
- Después de la realización de los puntos 2 a 4, se hace la socialización de cierre. En esta es importante que los estudiantes describan la forma en que involucraron los números 5 y 2, en la construcción de sus sucesiones.

- Para el desarrollo de la actividad 3, se debe garantizar que los estudiantes realicen el punto 4 de la presente guía y que además tengan la cuadrícula construida en cartón paja, puesto que la actividad se resuelve con este material.

TALLER CUADRADOS MÁGICOS
PROCESOS DE GENERALIZACIÓN – ACTIVIDAD 3

INSTITUCIÓN: ____
NOMBRE: ____
EDAD: ______________ **CURSO:** _____________ **FECHA:** ________________

1. De acuerdo a las secuencias presentadas en la siguiente tabla responde la pregunta


$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$\{30, 28, 26, 24, 22, 20, 18, 16, 14, 12, 10\}$
$\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$
$\{-17, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15, 19\}$

¿Qué características tienen en común?

2. Con los números 5 y 2, construye una secuencia como las anteriores, de nueve términos. Ten en cuenta que todas las secuencias del curso deben ser distintas, lo cual implica que debes *patentar la secuencia* con el docente.

3. Describe con tus palabras la forma en que construiste la secuencia que patentaste.

4. Construye nueve fichas y márcalas con los términos de tu secuencia**. Estas serán utilizadas en la siguiente actividad.**

5.6. ACTIVIDAD 4

Objetivos:

- Establecer un medio para utilizar patrones en la construcción de cuadrados mágicos de lado tres.

Estructura de la implementación:

Momento 1. Desarrollo de la guía en forma individual. (40 min)

Momento 2. Desarrollo de la guía en grupos de tres estudiantes. (30 min)

Momento 3. Socialización. (20 min)

Recomendaciones:

- La motivación a los estudiantes para construir los cuadrados mágicos que se proponen, juega un papel muy importante para evitar frustraciones. Se sugiere incentivarlos a través de frases como, ¡tu puedes!, ¡sigue intentando!, ¡ya habías hecho un cuadrado mágico en la primera actividad!, ¡todo lo que haces tiene valor, aún si no consigues el resultado esperado!, entre otras.

- En caso de que los estudiantes sigan manifestando tener dificultades para construir los cuadrados mágicos que se proponen, sugerirles recordar la solución que ellos mismos determinaron para el problema de la tortuga. No obstante, este debe ser un último recurso.

- Después de que los estudiantes desarrollen la guía en forma individual, se les indica que deben conformar grupos de tres, para volver a resolver los problemas compartiendo sus ideas y hallazgos. En particular, como deben construir tres cuadrados mágicos, pueden hacerlo con las sucesiones de los miembros del grupo.

- Durante la socialización, se debe indagar acerca de la aplicación del método dado por cada estudiante, a la construcción de *cualquier* cuadrado mágico de lado tres.

- Se debe hacer énfasis, en que la descripción que los estudiantes hacen sobre el método que utilizan en la construcción de cuadrados mágicos, debe ser muy detallada, puesto que con esto se pone en evidencia la expresión de la generalidad y el reconocimiento de patrones.

TALLER CUADRADOS MÁGICOS
PROCESOS DE GENERALIZACIÓN – ACTIVIDAD 4

INSTITUCIÓN: ____
NOMBRE: ____
EDAD: _______________ CURSO: ______________ FECHA: _________________

1. Construye un cuadrado mágico utilizando la sucesión que patentaste, utilizando el material y escríbelo a continuación:

2. Intercambia tus fichas con un compañero y construye un cuadrado mágico con las de él. Escribe el resultado en la siguiente cuadrícula.

3. Intercambia tus fichas con otro compañero y construye un cuadrado mágico con estas. Escribe el resultado en la siguiente cuadrícula.

4. Explica detalladamente el método que seguiste para construir los cuadrados mágicos propuestos anteriormente.

5. ¿Existe alguna relación entre la posición de los números en las sucesiones y la ubicación de estos en el cuadrado mágico?

5.7. ACTIVIDAD 5

Objetivos:

- Reconocer patrones en la construcción de cuadrados mágicos.

Estructura de la implementación:

Momento 1. Reconocimiento grupal de algunos patrones relacionados con la construcción de cuadrados mágicos. (30 min)

Momento 2. Desarrollo de la guía en forma individual. (60 min)

Momento 3. Desarrollo de la guía en forma grupal. (50 min)

Momento 4. Socialización. (40 min)

Recomendaciones:

- Antes de que los estudiantes comiencen a resolver las preguntas planteadas en la guía, el docente debe invitar a los estudiantes a hacer una exploración de posibles regularidades en los cuadrados mágicos presentes en dicha guía. Sugiriendo a los estudiantes formular proposiciones, escribirlas en el tablero y verificar su cumplimiento para todos los cuadrados mágicos. Posiblemente el docente será el primero en hacer una proposición y pedir al grupo de estudiantes que verifiquen su validez. Esta primera etapa resulta ser importantísima para el desarrollo de la actividad, puesto que para su resolución se hace necesario tener un alto grado de observación, abstracción y reconocimiento de elementos o características comunes.

- Durante el desarrollo de la guía, es pertinente sugerir a los estudiantes que busquen además, relaciones entre la posición de un término en el cuadrado y en la sucesión.

- El uso de colores y marcas sobre los cuadrados que se presentan, puede servir como medio para el reconocimiento de los patrones relacionados con su construcción.

- El desarrollo de la guía, debe hacerse primero en forma individual y después en forma grupal. Es muy probable que no todos los estudiantes (en la etapa inicial) desarrollen la totalidad de la guía, por ello es importante motivar constantemente a los estudiantes y darles a conocer que todos sus esfuerzos, tienen un valor importante en su aprendizaje y en el éxito de la actividad.

- Estudiar previamente el método hindú para la construcción de cuadrados mágicos, descrito en el desarrollo del presente trabajo, puesto que conocerlo puede servir de apoyo en la orientación del trabajo de los estudiantes.

TALLER CUADRADOS MÁGICOS
PROCESOS DE GENERALIZACIÓN – ACTIVIDAD 5

INSTITUCIÓN: ____
NOMBRE: ____
EDAD: ________________ **CURSO:** _______________ **FECHA:** __________________

A continuación se presentan algunos cuadrados mágicos, la sucesión de números que los conforman y su cifra mágica:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Sucesión: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Cifra mágica: 15

11	4	9
6	8	10
7	12	5

Sucesión: {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Cifra mágica: 24

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Sucesión: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49}

Cifra mágica: 175

52	74	96	118	-40	-18	4	26	48
72	94	116	-24	-20	2	24	46	50
92	114	-26	-22	0	22	44	66	70
112	-28	-6	-2	20	42	64	68	90
-30	-8	-4	18	40	62	84	88	110
-10	12	16	38	60	82	86	108	-32
10	14	36	58	80	102	106	-34	-12
30	34	56	78	100	104	-36	-14	8
32	54	76	98	120	-38	-16	6	28

Sucesión: {-40, -38, -36, -34, -32, -30, -28, -26, -24, -22, -20, -18, -16, -14, -12, -10, -8, -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42, 44, 46, 48, 50, 52, 54, 56, 58, 60, 62, 64, 66, 68, 70, 72, 74, 76, 78, 80, 82, 84, 86, 88, 90, 92, 94, 96, 98, 100, 102, 104, 106, 108, 110, 112, 114, 116, 118, 120}

Cifra mágica: 360

De acuerdo a los cuadrados mágicos presentados:

1. ¿Qué tienen en común? (enuncie mínimo 5 características presentes en todos)

2. ¿De qué otra manera se puede determinar la cifra mágica de cualquier cuadrado mágico sin realizar la suma? Explica tu respuesta.

3. Construye 25 fichas y márcalas con los números de la sucesión que se presenta en el punto 4.

4. Con ayuda del material (y los cuadrados mágicos presentados previamente), completa el cuadrado mágico que corresponde a la sucesión, además determina el valor de la cifra mágica.

	14			47
11	17			
				8
32				

Sucesión: {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65, 68, 71, 74}

Cifra mágica:

5. Explica paso a paso la forma en que construiste el cuadrado mágico.

5.8. ACTIVIDAD 6

Objetivos:

- Propiciar el uso de lenguaje simbólico para representar una sucesión aritmética.
- Propiciar el uso de la representación simbólica de un cuadrado mágico de lado tres.

Estructura de la implementación:

Momento 1. Presentación de la guía, a través de una lectura en voz alta de la misma. (10 min)

Momento 2. Desarrollo de la guía en forma individual. (40 min)

Momento 3. Desarrollo de la guía en grupos de tres estudiantes. (20 min)

Momento 4. Socialización. (20 min)

Recomendaciones:

- Uno de los caminos para llegar al uso del lenguaje simbólico para expresar la generalidad, es a través de la necesidad de la "economía en las formas de significación" (Vergel 2014, 75). Este proceso no es sencillo, así pues, es probable que los estudiantes no comprendan e identifiquen, lo que deben hacer en la primera pregunta, para ello es necesario que se aclare el objetivo de la pregunta, a través de un lenguaje cercano a los estudiantes sin sugerirles directamente que utilicen letras.
- Si en los literales c en adelante, de la primera pregunta, los estudiantes utilizan símbolos que no se relacionan con los dos primeros, es recomendable cuestionarlos sobre lo que significan los símbolos utilizados en los literales a y b.
- En la etapa de socialización de la actividad, puede suceder que en la discusión se haga una diferenciación, entre los conceptos de variable e incógnita. Lo cuál puede ayudar al grupo de estudiantes a dotar de significado a los símbolos utilizados.

TALLER CUADRADOS MÁGICOS
PROCESOS DE GENERALIZACIÓN – ACTIVIDAD 6

INSTITUCIÓN: ____
NOMBRE: ____
EDAD: _______________ **CURSO:** ______________ **FECHA:** _________________

1. Representa los enunciados de una manera más corta, teniendo en cuenta que se relacionan con TODA sucesión aritmética, que puede usarse en la construcción de CUALQUIER cuadrado mágico de lado tres.

   a) El primer término de la sucesión aritmética: _____

   b) El valor que se suma de forma constante, para obtener los términos de la sucesión: _____

   c) El segundo término de la sucesión aritmética se halla sumando una cantidad constante al primer término de la sucesión: _____ + _____

   d) El tercer término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al segundo término de la sucesión: (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

   e) El cuarto término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al tercer término de la sucesión: (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

   f) El quinto término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al cuarto término de la sucesión: (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

   g) El sexto término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al quinto término de la sucesión: (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

   h) El séptimo término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al sexto término de la sucesión:
   (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

   i) El octavo término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al séptimo término de la sucesión:
   (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

   j) El noveno término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al octavo término de la sucesión:
   (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

2. Construye el cuadrado mágico en la cuadrícula con los términos generales, de toda sucesión aritmética, abordados en el primer punto de esta guía.

3. Verifica que la construcción corresponde a un cuadrado mágico, a través de la suma de los términos de cada fila, columna y diagonal:

Fila 1:

Fila 2:

Fila 3:

Columna 1:

Columna 2:

Columna 3:

Diagonal 1:

Diagonal 2:

5.9. ACTIVIDAD 7

Objetivos:

- Propiciar la exploración de posibles operaciones con los cuadrados mágicos.

- Establecer un medio para que los estudiantes desarrollen habilidades de comunicación.

Estructura de la implementación:

Momento 1. Desarrollo de la guía de estudio en grupos de tres estudiantes. (90 min)

Momento 2. Socialización mediante exposiciones. (90 min)

Recomendaciones:

- Manifestar a los estudiantes que las “operaciones” que van a proponer, corresponden a una producción *novedosa*. Se espera que esto los motive y les muestre de forma explícita que ellos también hacen matemáticas, además que en ellas no todo está dicho y que aún hay mucho por hacer, construir o descubrir (si cabe este término).

- La *expresión general* que se plantea en las preguntas, hace referencia a una representación simbólica de las “operaciones” que propone cada grupo de estudiantes, además supone su aplicación para cualquier cuadrado mágico. Esta tarea integra todas las habilidades que se espera, se hallan desarrollado a lo largo de esta propuesta didáctica.

- Es posible que algunos grupos de estudiantes, no logren determinar la expresión general de las “operaciones”. En ese caso, es pertinente que todo el curso aporte durante la socialización, en la búsqueda de dicha expresión.

- Pedir a los estudiantes, ser muy detallados, en la explicación que brindan sobre sus “operaciones”, con el fin de determinar herramientas, que indiquen el nivel de reconocimiento y generalización de patrones en los estudiantes.

TALLER CUADRADOS MÁGICOS
PROCESOS DE GENERALIZACIÓN – ACTIVIDAD 7

INSTITUCIÓN: ____
NOMBRE: ____
EDAD: ________________ **CURSO:** _______________ **FECHA:** __________________

Las respuestas que den a las siguientes preguntas, deben contener un ejemplo, una explicación del método que proponen y una expresión general que se aplique para todo cuadrado mágico.

1. ¿Cómo puede crearse un nuevo cuadrado mágico a partir de dos cuadrados mágicos conocidos, de lado tres?

Ejemplo:

Explicación:

Expresión general:

2. ¿Cómo puede crearse un nuevo cuadrado mágico a partir de un número y un cuadrado mágico de lado tres conocido?

Ejemplo:

Explicación:

Expresión general:

3. ¿Cómo puede crearse un nuevo cuadrado mágico a partir de un solo cuadrado mágico de lado tres conocido?

Ejemplo:

Explicación:

Expresión general:

CAPÍTULO 6.

CONCLUSIONES

La propuesta didáctica desarrollada a lo largo de esta investigación, muestra la posibilidad de apartarse de los contenidos que usualmente se abordan en las aulas de clase, para desarrollar competencias y habilidades en matemáticas, a través del planteamiento de problemas. Lo cual va acorde con el Ministerio de Educación Nacional (2009) quien indica, que "las competencias matemáticas no se alcanzan por generación espontánea, sino que requieren de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos" (p. 49). Es claro que el Ministerio de Educación Nacional, no hace una restricción sobre los contenidos que deben trabajarse en el aula, en vez de eso, abre la posibilidad a desarrollar las competencias en matemáticas a través de la resolución de problemas en distintos contextos.

Este trabajo responde a lo planteado por el Ministerio de Educación Nacional (1998), quien enuncia que para aprender matemáticas se debe actuar como matemático. Esto es, formular conjeturas o hipótesis, probarlas o refutarlas, construir modelos, lenguajes, conceptos, teorías y socializarlas (p. 13). La propuesta y su implementación, tratan precisamente cada una de estas acciones, en el desarrollo de los procesos de generalización en los estudiantes, y que estos a su vez reconozcan y utilicen el lenguaje propio de las matemáticas, en el marco de una comunidad en la que el docente y estudiantes interactúan para construir y validar conocimiento, desmitificando la idea de que el docente es el poseedor único del saber.

La implementación de las actividades corroboró el aspecto motivacional que despierta el trabajo con los cuadrados mágicos, en los estudiantes, para el aprendizaje de las matemáticas. Adicionalmente la construcción colectiva del conocimiento relacionado con los cuadrados mágicos, mostró a los estudiantes, en esta investigación, que las matemáticas son una ciencia inacabada y que ellos pueden incidir en su desarrollo.

Los estudiantes, reconocieron que pueden darse la oportunidad de errar, y que esto hace parte del proceso de aprendizaje. La posibilidad de cometer errores, y valerse de estos en la construcción de conocimiento, desmitifica el carácter "acartonado" de las matemáticas. Mostrando a su vez que las matemáticas son creadas por seres humanos que también se equivocan y no por genios, como usualmente se piensa.

Al comienzo de esta investigación, se pretendía hacer el análisis de los procesos de generalización, a través del diseño de una matriz que cruzara a las teorías, *objetivación* (Radford, 2006) y de *representaciones semióticas* (Cañadas *et al*, 2012). Sin embargo, no fue pertinente hacerlo, debido a la naturaleza de la expresión de la generalidad, que es distinta en cada una de estas teorías. Pues en la teoría de la objetivación, para el estrato factual de la generalidad se pueden asociar las representaciones gráfica, numérica y verbal; para el estrato contextual sólo puede asociarse la representación verbal y para el simbólico, sólo la representación simbólica. Con esta restricción en las asociaciones se pierde relevancia en el diseño de la matriz.

Luego del análisis de las propuestas didácticas para educación básica y media relacionadas con patrones de generalización, se evidencio la ausencia de un componente detallado de la generalización sobre los cuadrados mágicos, es así que la secuencia didáctica es un aporte importante para este campo.

La expresión de la generalidad depende del contexto o situación en que se dé. Esto implica que para determinar de forma más efectiva, el nivel de reconocimiento de los patrones y regularidades, es necesario abordar diferentes situaciones que indaguen sobre distintos modos de presentarla o expresarla. Además debe tenerse en cuenta, que para los estudiantes resulta más natural expresar la generalidad, de acuerdo a los estratos factual o contextual, luego deben propiciarse situaciones, en las que el uso de símbolos alfanuméricos sea una necesidad.

Luego de la aplicación de la prueba diagnóstica se estableció el nivel de reconocimiento y generalización de patrones en estudiantes de ciclo cuatro, lo que permitió establecer las bases conceptuales y el posterior diseño e implementación de actividades de acuerdo a la población con la que se desarrolló el estudio. Generando de esta manera el aporte didáctico para la enseñanza del algebra elemental, propiciando el fortalecimiento de los procesos de generalización y comprensión de propiedades algebraicas básicas.

Adicionalmente la propuesta didáctica, arrojó resultados positivos en el desarrollo del pensamiento algebraico, asociado con el reconocimiento y uso de medios semióticos relativos al estrato simbólico de la generalidad. Los estudiantes llegaron a utilizar símbolos, para referirse a términos y características de las sucesiones aritméticas y de los cuadrados mágicos.

El trabajo en grupo durante algunas actividades y sus socializaciones, aportó al desarrollo de habilidades sociales y competencias relacionadas con la comunicación verbal o escrita. Con esta estrategia de trabajo en el aula, los estudiantes se ven en la necesidad de llegar a acuerdos, reconocer y valorar el quehacer de ellos mismos y del otro. Además rectifican, corroboran o complementan el trabajo de sus compañeros y el propio, construyendo a su vez conocimiento colaborativo, entre otros.

La implementación de la secuencia didáctica permitió, adecuar la enseñanza de algunos conceptos formales del álgebra mediante la transposición didáctica, dada desde el análisis de regularidades y patrones en cuadrados mágicos. Como por ejemplo que los estudiantes reconocieran la posibilidad de sumar objetos distintos a los números (ver Figura 55).

La implementación de esta propuesta didáctica, como introducción al álgebra elemental, toma bastante tiempo. Sin embargo, es de resaltar que aunque tome varias sesiones de clase, aborda conceptos como sucesiones aritméticas, sucesiones geométricas, matrices, y operaciones de matrices, los cuales aportan al desarrollo del pensamiento variacional, el cuál como indica el Ministerio de Educación Nacional (2009), tiene que ver con "el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos”(p. 66). Y que además dicho pensamiento cumple con un papel notable, en la resolución de problemas en otras áreas del conocimiento.

La situación que dio lugar al aparte titulado *la mágica del producto* (ver Figura 44), abordado en el marco teórico de este trabajo, da cuenta de la importancia de reconocer los conocimientos previos de los estudiantes y de incentivar la participación activa de todo el grupo durante las clases. Los conceptos relacionados con *la magia del producto,* se constituyen en un aporte importante a la teoría de los cuadrados mágicos, que no se había planeado o tratado en el diseño de la propuesta didáctica, y que abrió la posibilidad de explorar los cuadrados mágicos como matrices sobre un espacio vectorial.

CAPÍTULO 7

TRABAJO FUTURO

A continuación se establecen algunas ideas, derivadas del diseño e implementación de la propuesta didáctica, que dan cuenta de la posibilidad de continuar este proceso investigativo.

- Establecer una relación de los cuadrados mágicos con la geometría. Algunas reflexiones y rotaciones por ejemplo, pueden abordarse a partir de la construcción misma de los cuadrados mágicos.

- Generalizar el concepto de cuadrado mágico y sucesión a espacios vectoriales.

- Diseñar actividades que continúen la propuesta didáctica orientadas a introducir algunos conceptos sobre la estructura de espacio vectorial.

- Realizar un estudio sobre las espirales numéricas que pueden formarse con los cuadrados mágicos.

- Determinar relaciones entre los cuadrados mágicos y los números primos.

- Establecer relaciones entre los cuadrados mágicos y el triángulo de Pascal.

- Establecer relaciones, entre los cuadrados mágicos y los puntos del plano, de acuerdo a la notación que de estos se estableció en el planteamiento y construcción del marco teórico.

- Determinar distintas formas de presentar los cuadrados mágicos.

- Utilizar a los cuadrados mágicos en la criptografía.

- Establecer otras temáticas escolares, en las cuales sea pertinente el uso de los cuadrados mágicos, como medio para desarrollar habilidades y competencias.

- Determinar específicamente las competencias y habilidades que pueden desarrollarse, en el estudio de los cuadrados mágicos en la escuela.

APÉNDICE A

Convenios sobre la transcripción de los videos

- Cada línea de diálogo está conformada, por su número, el o los hablantes y el discurso.
- Los corchetes “[ ]” son utilizados, para indicar comentarios sobre el discurso, luego el texto que este dentro de ellos, no hace parte del mismo.
- El símbolo “(…)” se usa para representar la existencia de elementos del discurso o situaciones que no fueron transcritas.
- Los dos puntos que siguen a una palabra representan la extensión sonora de la misma.
- El paréntesis “( )” encierra una transcripción que no es segura o precisa, corresponde a la suposición más probable.
- El uso de la letra cursiva en una palabra, representa el momento en que el hablante de la línea siguiente hace una interrupción.

APÉNDICE B

Guías de las actividades implementadas

En este apéndice se presentan, las guías de actividades que fueron sometidas a un pilotaje para el diseño de la propuesta didáctica. Esto permite establecer la versión inicial de la propuesta didáctica.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

INSTITUTO PEDAGÓGICO NACIONAL

ÁREA DE MATEMÁTICAS

TALLER CUADRADOS MÁGICOS

PROCESOS DE GENERALIZACIÓN – PRUEBA DIAGNÓSTICA

NOMBRE: ____

EDAD: ______________ **CURSO:** ______________ **FECHA:** ________________

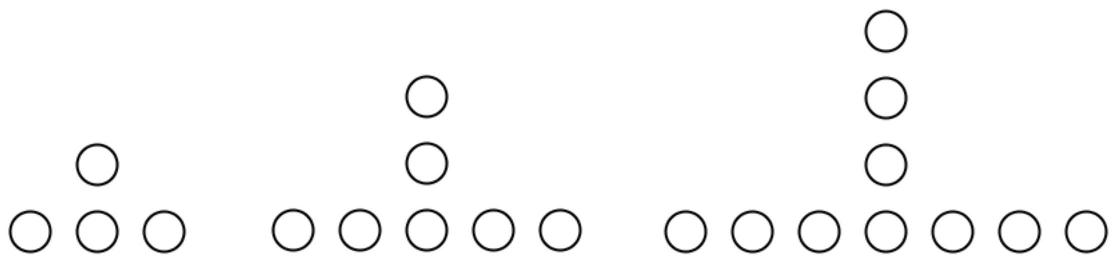


figura 1. figura 2. figura 3.

De acuerdo a la secuencia anterior:

1. Dibuja las figuras 4 y 5.

figura 4.	figura 5.

2. Calcula el número de círculos de la figura 10 explicando cómo lo haces. Evita hacer el dibujo de la figura.

3. Calcula el número de círculos de la figura 99 y explica como lo haces.

4. Juan hizo la gráfica de una figura perteneciente a esta secuencia. Él dibujó exactamente 61 círculos. ¿A qué número de figura corresponde? Explica la manera como procediste para encontrar tu respuesta.

5. ¿Existe alguna figura de la secuencia que tenga 200 círculos? Explica tu respuesta.

6. Escribe un mensaje a un compañero, que no asistió a la clase, en este explica con claridad y con todo detalle cómo calcular rápidamente el número de círculos que tendría la figura 998 de esta secuencia.

Taller adaptado de:

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). *Tesis Doctoral.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas (p 93).

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

INSTITUTO PEDAGÓGICO NACIONAL

ÁREA DE MATEMÁTICAS

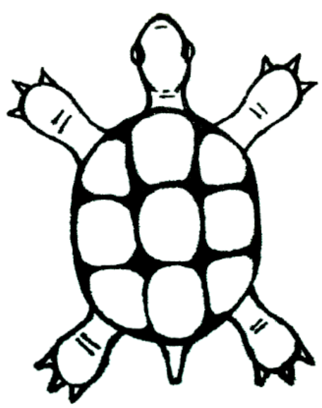
TALLER CUADRADOS MÁGICOS

ACTIVIDAD 1.

NOMBRE: ____

EDAD: ________________ **CURSO:** _______________ **FECHA:** ________________

1. Los cuadrados mágicos ya eran conocidos en China muchos siglos antes de nuestra era. Según cuenta la leyenda, el río *Lo* estaba desbordado y, a pesar de las ofrendas que hacían al dios del río, no conseguían que disminuyera su caudal. Por suerte para los habitantes de la región, el emperador *Yu* observó que tras cada ofrenda aparecía una misma tortuga y, curiosamente, en las divisiones de su caparazón, tenía marcas que representan los números consecutivos de 1 a 9. Las marcas estaban dispuestas de tal forma que, la suma de los números en forma horizontal, vertical y diagonal, siempre era 15. Así pues, se hicieron quince ofrendas seguidas (o incluyeron quince objetos en la ofrenda, ¡quién sabe!) y las aguas del río retornaron al cauce habitual. (Adaptado de Trigo 2007 p. 91-92)



De acuerdo a la historia ubique los números de 1 a 9, en el caparazón de la tortuga, de tal forma que los números de cada fila, columna y diagonal sumen15.

A continuación tienes varios cuadrados que puedes usar para rellenar la tortuga, procura no borrarlos, puesto que todo lo que haces es importante.

2. Explica detalladamente las estrategias que seguiste para ubicar los números en la tortuga, sin importar que estas tuvieran o no éxito.

3. Construye los cuadrados mágicos, de acuerdo a las listas que se presentan.

$\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$

$\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$

$\{-17, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15\}$

4. De acuerdo a lo anterior responde las siguientes preguntas:

   d) ¿Qué tienen en común las listas de números que se utilizan para construir los cuadrados mágicos propuestos?

e) ¿Existe alguna relación entre la posición de los números en la lista y la ubicación de estos en el cuadrado mágico? ¿cuál?

f) Explica detalladamente el método que seguiste para construir los cuadrados mágicos propuestos en el literal 3.

Taller adaptado de:

Trigo, A. (2007). Cuadrados mágicos. *Manual Formativo Autores científico-técnicos y académicos*. No. 045, pp. 91-92.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

INSTITUTO PEDAGÓGICO NACIONAL

ÁREA DE MATEMÁTICAS

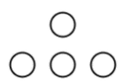
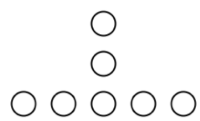
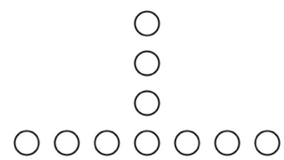
TALLER CUADRADOS MÁGICOS

ACTIVIDAD 2.

NOMBRE: ____

EDAD: ______________ **CURSO:** ______________ **FECHA:** ______________

A continuación se presentan las secuencias trabajadas en las guías anteriores

Clase	Secuencia
1. Prueba diagnóstica	 figura 1.  figura 2.  figura 3.
2. Actividad 1.	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18\}$ $\{5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29\}$ $\{-17, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11, 15\}$

1. ¿Cómo son las secuencias presentadas hasta el momento? (caracterícelas)

2. Lance el dado dos veces y construya una secuencia como las anteriores, involucrando los números obtenidos en los lanzamientos.

3. Con los números 3 y 2, construya una secuencia como las trabajadas en clase, que puedan usarse en la construcción de un cuadrado mágico de lado tres. Tenga en cuenta que todas las secuencias del curso deben ser distintas, lo cual implica patentar la secuencia con el docente.

4. En grupos de tres, construir tres cuadrados mágicos de lado tres con el material concreto, a partir de las secuencias que cada uno propuso. Además, cada grupo deberá intentar construir un cuadrado mágico con la secuencia $\{6, 12, 24, 48, 96, 192, 384, 768, 1536\}$

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

INSTITUTO PEDAGÓGICO NACIONAL

ÁREA DE MATEMÁTICAS

TALLER CUADRADOS MÁGICOS

ACTIVIDAD 3.

NOMBRE: ____

EDAD: ______________________ **CURSO:** _________________ **FECHA:** ____________

A continuación se presentan algunos cuadrados mágicos, la lista de números que los conforman y su cifra mágica:

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Lista: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}

Cifra mágica: 15

11	4	9
6	8	10
7	12	5

Lista: {4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

Cifra mágica: 24

17	24	1	8	15
23	5	7	14	16
4	6	13	20	22
10	12	19	21	3
11	18	25	2	9

Lista: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25}

Cifra mágica: 65

37	51	5	19	33
49	13	17	31	35
11	15	29	43	47
23	27	41	45	9
25	39	53	7	21

Lista: {5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53}

Cifra mágica: 145

30	39	48	1	10	19	28
38	47	7	9	18	27	29
46	6	8	17	26	35	37
5	14	16	25	34	36	45
13	15	24	33	42	44	4
21	23	32	41	43	3	12
22	31	40	49	2	11	20

Lista: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 48, 49}

Cifra mágica: 175

1. De acuerdo a los cuadrados mágicos presentados previamente:
   a. ¿De qué otra manera se puede determinar la cifra mágica de cualquier cuadrado sin realizar la suma? Explica tu respuesta.

b. Construye 25 fichas y márcalas con los números de la lista que se presenta a continuación, y con ayuda del material didáctico, ubica las fichas en la cuadrícula, de tal forma que obtengas un cuadrado mágico.

c. Determina el valor de la cifra mágica del cuadrado que construiste.

Lista: {2, 5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, 38, 41, 44, 47, 50, 53, 56, 59, 62, 65, 68, 71, 74}

Cifra mágica:

d. Explica paso a paso la forma en que construiste el cuadrado mágico.

2. Escribe un mensaje a un compañero que no asistió a clase, en el que expliques con claridad los pasos y condiciones para construir un cuadrado mágico de acuerdo a la forma presentada anteriormente.

3. Mete las 25 fichas que acabas de construir en una bolsa, saca una al azar SIN MIRARLA y métela en un sobre. Además sin revelar la lista, en el sobre incluye las instrucciones, para que cualquier persona pueda identificar la posición del número en la lista.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

INSTITUTO PEDAGÓGICO NACIONAL

ÁREA DE MATEMÁTICAS

TALLER CUADRADOS MÁGICOS

ACTIVIDAD 4.

NOMBRE: ____

EDAD: ____________________ **CURSO:** ________________ **FECHA:** ___________

1. Representa los enunciados de una manera más corta, teniendo en cuenta que se relacionan con una secuencia, que puede usarse en la construcción de **CUALQUIER** cuadrado mágico de lado tres, con el método hindú.

Para construir un cuadrado mágico de lado tres con el método hindú, partimos de una secuencia como las trabajadas en el taller. La cual recibe el nombre de **sucesión aritmética** si sus términos se hallan a través de la suma recurrente de un número constante, o **sucesión geométrica** si sus términos se hallan a través de la multiplicación repetida de un número constante (como el ejercicio propuesto por Sotelo).

a) El primer término de la sucesión aritmética: _____

b) El valor que se suma de forma constante, para obtener los términos de la sucesión: _____

c) El segundo término de la sucesión aritmética se halla sumando una cantidad constante al primer término de la sucesión: _____ + _____

d) El tercer término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al segundo término de la sucesión: (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

e) El cuarto término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al tercer término de la sucesión: (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

f) El quinto término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al cuarto término de la sucesión: (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

g) El sexto término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al quinto término de la sucesión: (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

h) El séptimo término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al sexto término de la sucesión: (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

i) El octavo término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al séptimo término de la sucesión: (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

j) El noveno término de la sucesión aritmética se halla sumando la cantidad constante al octavo término de la sucesión: (_____ + _____) + _____ = _____ + _____

2. Construye el cuadrado mágico con los términos de la sucesión aritmética representados anteriormente, a través del método hindú, en la cuadrícula y verifica que la suma de los términos de cada columna, fila y diagonal es constante:

Fila 1:

Fila 2:

Fila 3:

Columna 1:

Columna 2:

Columna 3:

Diagonal 1:

Diagonal 2:

3. Conforme un grupo de tres estudiantes y den un ejemplo de cómo crear un cuadrado mágico a partir de:

a) Dos cuadrados mágicos.

b) Un cuadrado mágico.

c) Un cuadrado mágico y un número.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Acuña, C. & Chalé, S. (2013). El desarrollo del pensamiento algebraico: la visualización en el caso de los patrones. *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe.* Santo Domingo, República Dominicana.

Acuña, S., Arellano, M. & Barahona, R. (2010). Cuadrados mágicos y matrices mágicas. *Revista del profesor de matemáticas.* Sociedad de Matemática de Chile. Vol. 11., pp. 22-38.

Alegría, P. (2009). La magia de los cuadrados mágicos. *Revista Sigma*. Departamento de Matemáticas. Universidad del país Vasco. No. 34., pp. 107-128.

Arriaga, G. (2008). Procesos de generalización con estudiantes de 1o y 2o de secundaria de una escuela pública del distrito federal: una propuesta de enseñanza. *Tesis de Maestría*. Universidad Pedagógica Nacional. México.

Bressan, A. & Gallego, M. (2010). El proceso de matematización progresiva en el tratamiento de patrones. Entre nosotros. *Correo del Maestro*. núm. 168, pp. 5-21.

Bulajich, R. (2009). Construcción de Cuadrados Mágicos (usando el método de Loubère). *Academia de Ciencias de Morelos.* Facultad de Ciencias. Universidad Autónoma del estado de Morelos. pp. 34-35.

Cañadas, M., Castro, E. & Castro E. (2012). Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones. *La Gaceta de la RSME*, vol. 15, número 3, pp. 561-573.

Castro, E., Cañadas, M. & Molina, M. (2010). El razonamiento inductivo como generador de conocimiento matemático. *Revista Uno 54*, pp. 55-67.

De la Rosa, M. (2007). Didáctica para la resolución de problemas. Educación primaria.

Domínguez, L. & Medina, I. (2015). Consideraciones sobre cuadrados mágicos. *Memorias del Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones*, 22, 111-118.

Fripp, A. (2009). El cuadrado mágico. Escenario para actividades de corte algebraico. *Revista Quehacer Educativo*, No. 98 (Diciembre), pp. 25-31.

Fernández, S. F. (2007). Leonhard Euler y el recorrido del caballo de ajedrez. *Sigma: revista de matemáticas. matematika aldizkaria*, (31), 225-228.

Gavilán, P. (1996). Historia del álgebra en la educación secundaria: resolución de problemas históricos. Revista Suma, 22 (Junio), pp. 83-85.

Jiménez, J. (2004) *Álgebra Lineal II. Con Aplicaciones en Estadística*. Facultad de Ciencias. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

Martínez, J. R. (2004). Los cuadrados mágicos en el Renacimiento. Matemáticas y magia natural en el De occulta philosophia de Agrippa.*Educación Matemática*, *16*(2), 77-92.

Martinon Cejas, A. & Molina Iglesias, C. (s.f) UTILIZACIÓN DE LOS CUADRADOS MÁGICOS EN COU. Recuperado de: http://goo.gl/maJFQX

Mason J., Burton L. & Stacey K. (1982). Pensar matemáticamente. Labor-M.E.C., Barcelona.

Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gowar, N. (1985). Routes to Roots of Algebra. Great Britain: The Open University Press.

Mencken, J. B. (2004). Cuadrados mágicos. *Matemáticas amenas*, 1.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá., pp. 10-13.

Ministerio de Educación Nacional (2009). Estándares básicos de competencias en matemáticas. *Potenciar el Pensamiento Matemático:¡ Un Reto Escolar*., pp. 48-68.

Ospina, D. (2012). Las representaciones semióticas en el aprendizaje del concepto de función lineal. *Tesis de Maestría*. Universidad Autónoma de Manizales.

Peralta, J. (2001). Acerca de una defectuosa educación matemática. *Didáctica universitaria*. Departamento de matemáticas. Universidad Autónoma de Madrid., pp. 163-173.

Polya, G. (1989). Cómo plantear y resolver problemas. (Zugazagoitia, Julián trad.) Trillas, México (obra original publicada en 1945).

Puig, L. (1996). Elementos de resolución de problemas. Comares, España.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M. & Méndez, A. (Eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2008). Iconicity and contraction. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-The International Journal on Mathematics Education, 40(1),* 83-96.

Ramírez Verdugo, F. M., Alcaide García, M., & Bazaga Fortes, M. J. (s.f.) El cuadrado Mágico. *Proyecto de innovación Educativa PIE07-084 subvencionado por el Servicio de innovación Educativa y el Servicio de Enseñanza Virtual y Laboratorio Tecnológicos de la Universidad de Málaga.*, 23.

Rodríguez, M. (2004). Construcción de cuadrados mágicos a partir de geometrías finitas. *Memorias XVI encuentro de geometría y IV de Aritmética*. Ibagué, Colombia. pp. 303-320.

Socas, M. (2011). La enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aportaciones de la investigación. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*. Vol. 77 (Julio)., pp. 5-34.

Stewart, J., Lothar, R. & Watson, S. (2012). *Precálculo Matemáticas para el cálculo*. Sexta edición. Editorial Cengage. México.

Trigo, A. (2007). Cuadrados mágicos. *Manual Formativo Autores científico-técnicos y académicos*. No. 045, pp. 91-92.

Vergel, R. (2014). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años). *Tesis Doctoral.* Universidad Distrital Francisco José de Caldas.